"Механіка гіроскопічних систем". - Київ: МНДІ ПМ "РИТМ", 1999, №15, с. 3-10.

УДК 531.383

В.О.АПОСТОЛЮК, *аспірант, Нац. техн. ун-т (КПІ),*
О.В.ЗБРУЦЬКИЙ, *д-р техн. наук, проф., Нац. техн. ун-т (КПІ),*

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОХИБКИ КАРДАНОВОГО МІКРОМЕХАНІЧНОГО ВІБРАЦІЙНОГО ГІРОСКОПА

Розглядаються температурні похибки вимірювання кутової швидкості за допомогою карданового мікромеханічного вібраційного гіроскопа. Проаналізована залежність похибки як від температурної зміни пружності торсіонів, так і від температурних змін інерційних параметрів конструкції чутливого елементу гіроскопа. Здобута формула для температурного коефіцієнту помилки у вимірюванні переносної кутової швидкості.

У нинішній час значно зріс інтерес до мікромеханічних інерціальних датчиків, що, у свою чергу, зумовлює актуальність побудови і дослідження їхніх докладних математичних моделей. З точки зору повноти розуміння особливостей динаміки карданового мікромеханічного вібраційного гіроскопа, представляють інтерес дослідження різноманітних джерел похибок виміру кутової швидкості. Одним з можливих джерел таких похибок у мікромеханічному вібраційному гіроскопі є залежність параметрів конструкції від зміни температури. Це викликано зміною геометричних розмірів елементів конструкції чутливого елементу із зміною температури. Конструкція та принцип дії карданового мікромеханічного гіроскопа докладно вивчені у роботах [1,2].

Поведінка чутливого елементу мікромеханічного вібраційного гіроскопа на основі, що обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \{0,0,\Omega\}$, описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + \left(k_1^2 + d_1\Omega^2\right)\alpha - g_1\Omega\dot{\beta} = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + \left(k_2^2 + d_2\Omega^2\right)\beta + g_2\Omega\dot{\alpha} = m_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

В системі рівнянь (1) α і β - кути повороту внутрішньої і зовнішньої рамок відповідно; k_j ($j = 1,2$) - парціальні частоти внутрішньої і зовнішньої рамок; h_j - коефіцієнти демпфірування; $m_2(t)$ - момент зовнішніх сил, які викликають вимушені коливання зовнішньої рамки; d_j і g_j - постійні коефіцієнти, які залежать інерційних параметрів конструкції таких, як $d_j = D_j/I_j$, $g_j = G/I_j$, де

$$\begin{aligned} &I_1 = I_{x2}, \\ &I_2 = I_{y1} + I_{y2}, \\ &G = I_{x2} + I_{y2} - I_{z2}, \\ &D_1 = I_{z2} - I_{y2}, \\ &D_2 = I_{z1} + I_{z2} - I_{x1} - I_{x2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Розглянемо спочатку залежність зміни пружності торсіонів чутливого елементу від температури. Припустимо, що торсіон має форму паралелепіпеда. При лінійному розширенні розміри торсіона у напрямку відповідних координатних осей будуть наступними функціями зміни температури ΔT:

$$l_{cx} = l_{cx0}\left(1+\gamma_x \Delta T\right),\ l_{cy} = l_{cy0}\left(1+\gamma_y \Delta T\right),\ l_{cz} = l_{cz0}\left(1+\gamma_z \Delta T\right), \tag{3}$$

де l_{cx0}, l_{cy0}, l_{cz0} - значення відповідних лінійних розмірів при початковій температурі; γ_x, γ_y, γ_z - коефіцієнти лінійного розширення матеріалу торсіона у напрямку відповідних координатних осей.

Кутова пружність розглядуваного торсіона обчислюється наступним чином:

$$c = G\frac{l_{cx} l_{cz}^3}{3 l_{cy}}, \tag{4}$$

де G - модуль Юнга 2-го роду для матеріалу торсіона.

Після підстановки виразів (3) у (4) одержуємо

$$c = G\frac{l_{cx0} l_{cz0}^3 \left(1+\gamma_x \Delta T\right)\left(1+\gamma_z \Delta T\right)^3}{3 l_{cy0}\left(1+\gamma_y \Delta T\right)}. \tag{5}$$

Представимо пружність торсіону в вигляді

$$c \approx c_0\left(1+\gamma_C \Delta T\right), \tag{6}$$

де c_0 - пружність торсіона при початковій температурі, γ_c - коефіцієнт температурної зміни пружності торсіона.

Приймаючи коефіцієнти температурного розширення малими і, отже, нехтуючи елементами, чий порядок малості вище першого, одержуємо наступні вирази коефіцієнтів формули (6):

$$\begin{aligned} c_0 &= G\frac{2 l_{cx0} l_{cz0}^3}{3 l_{cy0}}, \\ \gamma_C &= \gamma_x + 3\gamma_z - \gamma_y. \end{aligned} \tag{7}$$

З іншого боку, зміна температури призведе не тільки до зміни пружності торсіонів чутливого елементу, але і до зміни моментів інерції його конструкції. Моменти інерції тіл, що входять до складу чутливого елементу мікромеханічного гіроскопу, можуть бути приблизно обчислені по наступним нижче формулам.

Для зовнішньої рамки:

$$\begin{aligned} I_{x1} &= \frac{M_1}{12}\left(l_{y1}^2 + l_{z1}^2\right) - \frac{M_0}{12}\left(l_{y0}^2 + l_{z0}^2\right), \\ I_{y1} &= \frac{M_1}{12}\left(l_{x1}^2 + l_{z1}^2\right) - \frac{M_0}{12}\left(l_{x0}^2 + l_{z0}^2\right), \\ I_{z1} &= \frac{M_1}{12}\left(l_{y1}^2 + l_{x1}^2\right) - \frac{M_0}{12}\left(l_{y0}^2 + l_{x0}^2\right), \end{aligned} \tag{8}$$

де M_1 - маса паралелепіпеда, розміри якого l_{x1}, l_{y1}, l_{z1} співпадають з габаритами зовнішньої рамки; M_0 - маса паралелепіпеда з розмірами l_{x0}, l_{y0}, l_{z0}, що "вирізаний" із центру зовнішньої рамки.

Для внутрішньої рамки:

$$
\begin{aligned}
I_{x2} &= \frac{M_2}{12}\left(l_{y2}^2 + l_{z2}^2\right) + \frac{M_3}{12}\left(l_{y3}^2 + 4l_{z3}^2\right),\\
I_{y2} &= \frac{M_2}{12}\left(l_{x2}^2 + l_{z2}^2\right) + \frac{M_3}{12}\left(l_{x3}^2 + 4l_{z3}^2\right),\\
I_{z2} &= \frac{M_2}{12}\left(l_{y2}^2 + l_{x2}^2\right) + \frac{M_3}{12}\left(l_{y3}^2 + l_{x3}^2\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де M_2 - маса паралелепіпеда, розміри якого l_{x2}, l_{y2}, l_{z2} співпадають з габаритами внутрішньої рамки; M_3 і l_{x3}, l_{y3}, l_{z3} - відповідно маса і розміри інерційної маси, яка знаходиться на внутрішній рамці.

Розміри розглядуваних елементів конструкції чутливого елементу мікромеханічного вібраційного гіроскопа, за винятком інерційної маси, при лінійному розширенні будуть визначатися, як

$$
l_{xi} = l_{xi0}\left(1 + \gamma_x \Delta T\right),\ l_{yi} = l_{yi0}\left(1 + \gamma_y \Delta T\right),\ l_{zi} = l_{zi0}\left(1 + \gamma_z \Delta T\right), \tag{10}
$$

де $i = 0,1,2$.

Розміри інерційної маси будуть змінюватися аналогічно, але із своїм коефіцієнтом температурного розширення γ_m:

$$
l_{x3} = l_{x30}\left(1 + \gamma_m \Delta T\right),\ l_{y3} = l_{y30}\left(1 + \gamma_m \Delta T\right),\ l_{z3} = l_{z30}\left(1 + \gamma_m \Delta T\right). \tag{11}
$$

Представимо залежність коефіцієнтів (2) від температури стандартним чином:

$$
\begin{aligned}
&I_1 \approx I_{10}\left(1 + \gamma_{I1}\Delta T\right),\ I_2 \approx I_{20}\left(1 + \gamma_{I2}\Delta T\right),\\
&G \approx G_0\left(1 + \gamma_G \Delta T\right),\\
&D_1 \approx D_{10}\left(1 + \gamma_{D1}\Delta T\right),\ D_2 \approx D_{20}\left(1 + \gamma_{D2}\Delta T\right),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

де γ_{I1}, γ_{I2}, γ_G, γ_{D1} і γ_{D2} - відповідні еквівалентні коефіцієнти лінійного температурного розширення.

Використовуючи співвідношення (2), а також формули (8) - (11), нехтуючи членами порядку малості вище першого, одержуємо вирази для еквівалентних коефіцієнтів температурного розширення:

$$
\gamma_{I1} = 2\frac{M_2\left(l_{y20}^2\gamma_y + l_{z20}^2\gamma_z\right) + M_3\left(l_{y30}^2 + 4l_{z30}^2\right)\gamma_m}{M_2\left(l_{y20}^2 + l_{z20}^2\right) + M_3\left(l_{y30}^2 + l_{z30}^2\right)},
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{I2} &= 2\Big(\gamma_x\left(M_1 l_{x10}^2 - M_0 l_{x00}^2 + M_2 l_{x20}^2\right) +\\
&+ \gamma_z\left(M_1 l_{z10}^2 - M_0 l_{z00}^2 + M_2 l_{z20}^2\right) + M_3\left(l_{x30}^2 + 4l_{z30}^2\right)\gamma_m\Big) \times\\
&\times \Big[M_1\left(l_{z10}^2 + l_{x10}^2\right) - M_0\left(l_{z00}^2 + l_{x00}^2\right) + M_2\left(l_{z20}^2 + l_{x20}^2\right) +\\
&+ M_3\left(l_{x30}^2 + 4l_{z30}^2\right)\Big]^{-1},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\gamma_G = 2\frac{M_2 l_{z20}^2\gamma_z + 4M_3 l_{z30}^2\gamma_m}{M_2 l_{z20}^2 + 4M_3 l_{z30}^2},
$$

$$\gamma_{D2} = 2\Big[\gamma_x\left(M_1 l_{x10}^2 - M_0 l_{x00}^2 + M_2 l_{x20}^2\right) -$$
$$-\gamma_z\left(M_1 l_{z10}^2 - M_0 l_{z00}^2 + M_2 l_{z20}^2\right) + M_3\left(l_{x30}^2 - 4l_{z30}^2\right)\gamma_m\Big]\times$$
$$\times\Big[M_1\left(l_{x10}^2 - l_{z10}^2\right) + M_0\left(l_{z00}^2 - l_{x00}^2\right) + M_2\left(l_{x20}^2 - l_{z20}^2\right) +$$
$$+ M_3\left(l_{x30}^2 - 4l_{z30}^2\right)\Big]^{-1},$$

$$\gamma_{D1} = 2\frac{M_2\left(l_{y20}^2\gamma_y - l_{z20}^2\gamma_z\right) + M_3\left(l_{y30}^2 - 4l_{z30}^2\right)\gamma_m}{M_2\left(l_{y20}^2 - l_{z20}^2\right) + M_3\left(l_{y30}^2 - l_{z30}^2\right)}.$$

Розглянемо тепер зміну амплітуди кутових коливань внутрішньої рамки чутливого елемента, у залежності від температурних змін інерційних та пружних параметрів системи. Коефіцієнти системи (1) з точністю до першого порядку малості можуть бути представлені, як

$$\begin{aligned} k_i^2 &\approx k_{i0}^2\left(1 + \left(\gamma_C - \gamma_{Ii}\right)\Delta T\right), \\ d_i &\approx d_{i0}\left(1 + \left(\gamma_{Di} - \gamma_{Ii}\right)\Delta T\right), \\ g_i &\approx g_{i0}\left(1 + \left(\gamma_G - \gamma_{Ii}\right)\Delta T\right), \end{aligned} \tag{14}$$

де $i = 1{,}2$, а індекс 0 мають значення відповідних коефіцієнтів при початковій температурі.

З урахуванням (14) система диференціальних рівнянь (1), яка описує поведінку чутливого елементу буде

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + \left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2\right)\alpha - g_{10}\Omega\dot{\beta} = \\ = -\left[k_{10}^2\left(\gamma_C - \gamma_{I1}\right) + d_{10}\left(\gamma_{D1} - \gamma_{I1}\right)\Omega^2\right]\Delta T\alpha + \\ + g_{10}\left(\gamma_G - \gamma_{I1}\right)\Delta T\Omega\dot{\beta}, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + \left(k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2\right)\beta + g_{20}\Omega\dot{\alpha} = \\ = m_2(t) - \left[k_{20}^2\left(\gamma_C - \gamma_{I2}\right) + d_{20}\left(\gamma_{D2} - \gamma_{I2}\right)\Omega^2\right]\Delta T\beta - \\ - g_{20}\left(\gamma_G - \gamma_{I2}\right)\Delta T\Omega\dot{\alpha}. \end{cases} \tag{15}$$

Впливом температурних змін на коливання зовнішньої рамки можна знехтувати у порівнянні із моментом сил, які створюються системою збудження, бо вона коливається поза своїм резонансом. З іншого боку, вплив температурних змін на коливання внутрішньої рамки можна вважати величинами першого порядку малості і з достатнім ступенем точності використати асимптотичні методи для знаходження рішення, відповідного до температурної похибки.

Скористуємось методом послідовних наближень. Представимо узагальнені координати системи (15) у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1, \\ \beta &\approx \beta_0, \end{aligned} \tag{16}$$

де ε - фіктивний параметр, що описує малість відповідного додатка.

Нульове наближення призводить нас до системи диференціальних рівнянь, аналогічної до системи рівнянь (1):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_0 + 2h_1\dot{\alpha}_0 + \left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2\right)\alpha_0 - g_{10}\Omega\dot{\beta}_0 = 0, \\ \ddot{\beta}_0 + 2h_2\dot{\beta}_0 + \left(k_{10}^2 + d_{20}\Omega^2\right)\beta_0 + g_{20}\Omega\dot{\alpha}_0 = m_2(t). \end{cases} \tag{17}$$

Рішення системи рівнянь (17) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \mathrm{Re}\left\{\overline{A}_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \quad \overline{A}_0 = A_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_{10}}, \\ \beta_0(t) &= \mathrm{Re}\left\{\overline{B}_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \quad \overline{B}_0 = B_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_{20}}, \end{aligned} \tag{18}$$

де комплексні амплітуди $\overline{A}_0$ і $\overline{B}_0$ можуть бути обчислені за формулами

$$\begin{aligned} \overline{A}_0 &= g_1 m_2 i\omega\Omega \big/ \overline{\Delta}(\omega), \\ \overline{B}_0 &= m_2\left(k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2 + 2h_1 i\omega\right) \big/ \overline{\Delta}(\omega), \\ \overline{\Delta}(\omega) &= \left(k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2\right)\left(k_2^2 + d_2\Omega^2 - \omega^2\right) - \left(4h_1h_2 + g_1g_2\Omega^2\right)\omega^2 + \\ &+ 2i\omega\left[h_1\left(k_2^2 + d_2\Omega^2 - \omega^2\right) + h_2\left(k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Складову кута відхилення внутрішньої рамки, яка відповідає першому наближенню, знаходимо з рівняння

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha}_1 + 2h_1\dot{\alpha}_1 + \left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2\right)\alpha_1 = \\ &= -\left[k_{10}^2\left(\gamma_C - \gamma_{I1}\right) + d_{10}\left(\gamma_{D1} - \gamma_{I1}\right)\Omega^2\right]\Delta T\alpha_0 + \\ &+ g_{10}\left(\gamma_G - \gamma_{I1}\right)\Delta T\Omega\dot{\beta}_0, \end{aligned} \tag{20}$$

Рішення рівняння (20) будемо шукати аналогічно (18) в вигляді

$$\alpha_1(t) = \mathrm{Re}\left\{\overline{A}_1\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \quad \overline{A}_1 = A_1\,\mathrm{e}^{i\varphi_{11}}.$$

Після переходу від комплексної амплітуди до дійсної одержуємо амплітуду коливань, пропорційну до зміну температури:

$$\begin{aligned} A_1 = A_T &= \frac{k_{10}^2\left(\gamma_C - \gamma_{I1}\right) + d_{10}\left(\gamma_{D1} - \gamma_{I1}\right)\Omega^2}{\sqrt{\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4h_1^2\omega^2}}\Delta T A_0 + \\ &+ \frac{g_{10}\left(\gamma_G - \gamma_{I1}\right)\omega\Omega}{\sqrt{\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4h_1^2\omega^2}}\Delta T B_0, \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\begin{aligned} A_0 &= g_{10} m_2 \omega\Omega \big/ \sqrt{\Delta_0^2}, \\ B_0 &= m_2\sqrt{\left[\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4h_1^2\omega^2\right] \big/ \Delta_0^2}, \end{aligned}$$

$$\Delta_0^2 = \left[\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)\left(k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2 - \omega^2\right) - \left(4h_1h_2 + g_{10}g_{20}\Omega^2\right)\omega^2\right]^2 +$$
$$+ 4\omega^2\left[h_1\left(k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2 - \omega^2\right) + h_2\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)\right]^2$$

Лінійна залежність амплітуди коливань внутрішньої рамки A_T, зумовлена температурними змінами, від амплітуди нестурбованих коливань дозволяє представити амплітуду кінцевих коливань A у вигляді:

$$A = A_0\left(1 + \gamma_T \Delta T\right), \tag{22}$$

де γ_T - коефіцієнт температурної похибки, що може бути розрахований за допомогою формули

$$\gamma_T = \frac{k_{10}^2\left(\gamma_C - \gamma_{I1}\right) + d_{10}\left(\gamma_{D1} - \gamma_{I1}\right)\Omega^2}{\sqrt{\left(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4h_1^2\omega^2}} + \gamma_G - \gamma_{I1}. \tag{23}$$

Отримані залежності (22) і (23) дозволяють оцінити вплив змін температури на амплітуду інформативних вихідних коливань внутрішньої рамки чутливого елемента карданової схеми мікромеханічного вібраційного гіроскопа.

Список використаної літератури

1. Boxenhorn B. *Planar inertial sensor.* The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge, Mass., U. S. Patent N 4598585. Заявл. 19.03. 84., опубл. 8.07. 86.

2. Апостолюк В. А., Збруцкий А. В. *Исследования микромеханических инерциальных датчиков.* 4-ая Санкт.-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 1997.