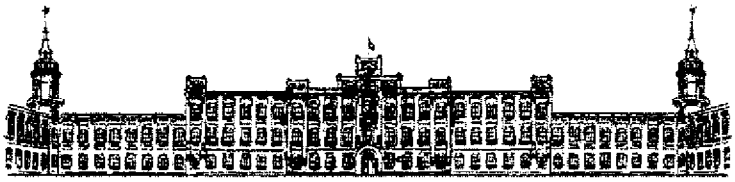
Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Розв'язування задач з коливань матеріальної точки за допомогою комп'ютера

Методичні вказівки до виконання практичних завдань



Київ-2006

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
З КОЛИВАНЬ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ
ЗА ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРА

Методичні вказівки
до виконання практичних завдань
з теоретичної механіки
для студентів усіх спеціальностей

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2006

Розв’язування задач з коливань матеріальної точки за допомогою комп’ютера: Метод. вказівки до викон. практ. занять з теоретичної механіки для студ. усіх спец. / Уклад.: О. С. Апостолюк, В. О. Апостолюк. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 64 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»

(Протокол № 10 від 15.06.2006 р.)

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Розв’язування задач з коливань матеріальної точки за допомогою комп’ютера

Методичні вказівки
до виконання практичних занять
з теоретичної механіки
для студентів всіх спеціальностей

Укладачі: *Апостолюк Олександр Семенович*, *Апостолюк Владислав Олександрович*

Відповідальний редактор *В. Г. Савін*, д-р техн. наук, проф.

Рецензент *М. З. Кваско*, д-р техн. наук, проф.

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

Темплан 2006 р., поз. 2-045

Підп. до друку 6.09.2006. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк арк. 3,72. Обл.-вид. арк. 6,19. Зам. № 6171. Наклад 200 пр.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
тел./факс (044) 241-68-78

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Збірник задач І. В. Мещерського [1] містить низку задач на коливання матеріальної точки, які мають схожі умови і дають змогу розглянути найпростіші і в той же час найважливіші аспекти теорії коливань. В даній роботі наведені аналітичні методи розв’язання цих задач, а також показано, яким чином використовується персональний комп’ютер як для розв’язання кожної задачі, так і для подальшого аналізу отриманого розв’язку.

В посібнику [2] рекомендується наступна послідовність розв’язання задач на цю тему:

1) вибрати систему відліку, взявши початок координат у положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
2) записати початкові умови руху матеріальної точки;
3) зобразити на рисунку активні сили, сили опору та збурюючі сили, прикладені до матеріальної точки. Застосувавши аксіому про звільнення від в’язей, додати реакції в’язей;
4) скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на відповідну вісь;
5) проінтегрувати диференціальне рівняння руху, використавши початкові умови руху для визначення сталих інтегрування (див. Додаток).

Зауважимо, що неможливо у невеликій за обсягом роботі розглянути незліченні проблеми сучасної інженерної техніки, пов’язані із коливаннями. Більш детально різноманітні питання теорії коливань, а також практичного втілення досягнутих нею результатів, розглянуті у роботах [3 - 31], наведених у списку літератури.

1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

32.1. Пружина AB, закріплена одним кінцем у точці A така, що для подовження її на 1 м треба прикласти у точці B при статичному навантаженні силу 19,6 Н (див. рис. 1). У деякий момент до нижнього кінця B недеформованої пружини підвішують гирю C маси 0,1 кг і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння подальшого руху гирі і вказати амплітуду і період її коливань, відносячи рух до осі, що проведена вертикально вниз із положення статичної рівноваги гирі.

Відповідь : $x = -0{,}05\cos 14t$, м; $a = 5$ см, $T = 0{,}45$ с.

Дано: $c = 19{,}6$ Н/м, $m = 0{,}1$ кг, $\mathrm{v}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$, a, T.

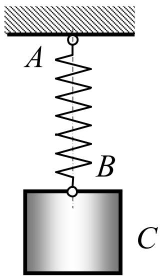


Рис. 1. Гиря на пружині.

Р о з в' я з а н н я

Приймаючи, що маса гирі зосереджена на кінці пружини (у т. B), покажемо три положення цієї системи (1-3 на рис. 2).

У першому положенні зображена недеформована пружина. На другому – положення статичної рівноваги системи; у цьому положенні доцільно вибрати початок відліку. Третє положення є довільним. Зправа показана діаграма сил (④), прикладених до матеріальної точки B.

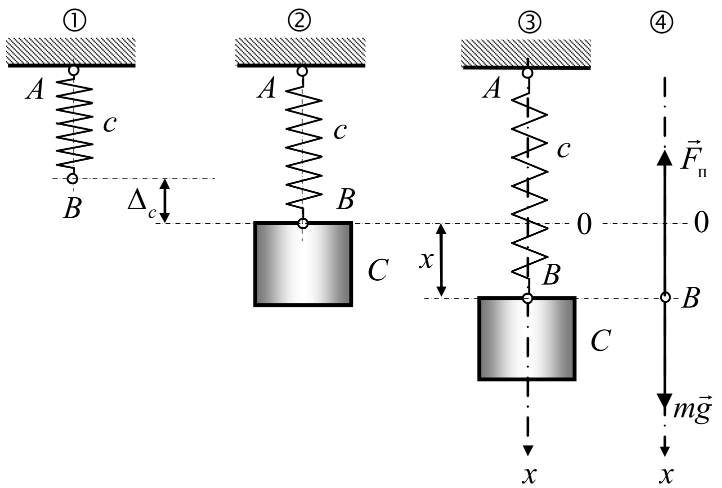


Рис. 2. Три положення системи і діаграма сил.

Із наведеного рис. 1 випливає, що початкове (при $t=0$) відхилення т. B (від положення статичної рівноваги ②) дорівнює: $x(0)=-\Delta_c$.

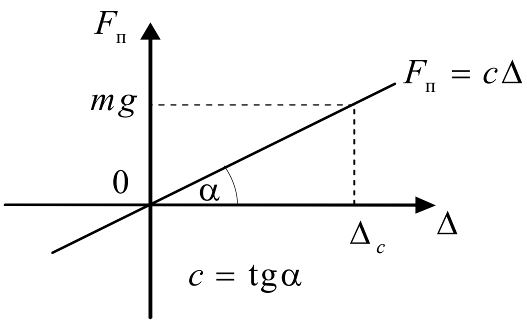


Рис. 3. Сила пружності.

Приймаємо, що сила пружності $\vec{F}_п$ визначається за законом Гука: $F_п = c\Delta$, де Δ - повна деформація пружини (рис. 3). Зауважимо, що у положенні ② маємо: $mg = c\Delta_c$, а сила пружності у довільному положенні ③ дорівнюватиме:

$$F_п = c\left(\Delta_c + x\right).$$

Оскільки точка B є вільною[1], скористаємося другим законом Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_п,$$

або в проекції на вісь x: $m\ddot{x} = mg - c(\Delta_c + x)$, звідки маємо: $m\ddot{x} + cx = 0$.

Розділивши останнє рівняння на масу m матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

[1] Пружина не є в'яззю для матеріальної точки B, - вона створює потенціальне поле сили пружності.

де $k^2 = c/m$ - квадрат кругової частоти вільних коливань матеріальної точки. Рівняння (1) є математичною моделлю руху даної матеріальної точки B. Розв'язуємо його за даних початкових умов за стандартною математичною методикою.

Складаємо характеристичне рівняння (замінюючи в рівнянні (1) $\ddot{x} \to \lambda^2,\ \dot{x} \to \lambda,\ x \to 1$)

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

корені якого дорівнюють: $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Тоді загальний розв'зок лінійного однорідного диференціального рівняння (1) з постійними коефіцієнтами шукається у вигляді:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{2}$$

Для знаходження сталих інтегрування C_1 і C_2 знаходимо першу похідну від x за часом

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{3}$$

Підстановка початкових умов у вирази (2) і (3) дає:

$$x(0) = C_1 = -\Delta_c,\ \dot{x}(0) = C_2 k = 0,$$

звідки випливає, що $C_1 = -\Delta_c$, а $C_2 = 0$.

Отже кінематичний закон руху матеріальної точки B (гирі) вздовж осі x має вигляд

$$x(t) = -\Delta_c \cos kt. \tag{4}$$

Обчислимо необхідні параметри коливань:

$$\Delta_c = mg/c = 0{,}1\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2 / 19{,}6\ \text{Н/м} = 0{,}05\ \text{м} = 5\ \text{см};$$

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{19{,}6\ \text{Н/м} / 0{,}1\text{кг}} = 14\ \text{рад/с}.$$

Підстановка цих параметрів у вираз (4) дає

$$\boxed{x(t) = -5\cos 14t\ \text{см}}.$$

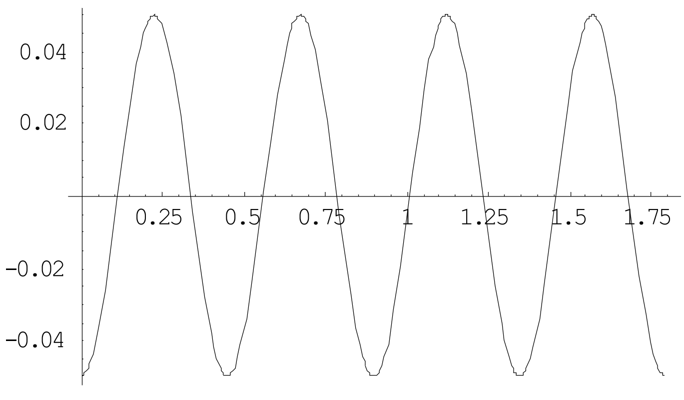
З цього виразу випливає, що амплітуда a коливань дорівнює 5 см, тобто

$\boxed{a = 5\ \text{см}}$, а період

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ \text{рад}}{14\ \text{рад/с}} = 0,45\ \text{с}}.$$

Нижче наведена роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica.

```
m=0.1;c=19.6;
soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == 0, x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t]
{{x[t] -> (k x0 Cos[k t] + xdot0 Sin[k t])/k}}
x[t]/.soln[[1]]
(k x0 Cos[k t] + xdot0 Sin[k t])/k
xdot0=0;x0=-0.05;
%%/. k -> Sqrt[c/m]
-0.05 Cos[14. t]
x=ComplexExpand[%]//FullSimplify
-0.05 Cos[14. t]
T = 2 Pi/k /. k -> 14
π/7
Plot[x,{t,0,4 T}]
```



-Graphics-

Висновок: гиря на пружині виконуватиме незгасаючі коливання з амплітудою $a = 5\ \text{см}$, періодом $T = 0,45\ \text{с}$ за законом $x(t) = -5\cos 14t\ \text{см}$.

32.13. До пружини, коєфіцієнт жорсткості якої дорівнює 19,6 Н/м, були підвішені два тягаря із масами $m_1 = 0{,}5$ кг і $m_2 = 0{,}8$ кг (рис. 1). Система знаходилася у спокої в положенні статичної рівноваги, коли тягар m_2 забрали. Знайти рівняння руху, частоту, кругову частоту і період коливань тягаря, що залишився.

Відповідь : $x = 0{,}4\cos 6{,}26t$ м, $f = 1$ Гц, $k = 2\pi$ рад/с, $T = 1$ с.

Дано: $c = 19{,}6$ Н/м, $m_1 = 0{,}5$ кг, $m_2 = 0{,}8$ кг, при $t = 0$: $x(0) = \Delta_{c0} - \Delta_{c1}$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$, f, k, T.

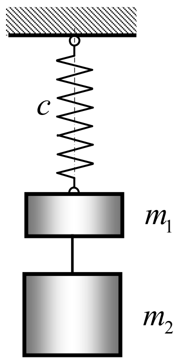


Рис. 1. Тягарі на пружині.

Р о з в’ я з а н н я

Із умови рівноваги $(m_1 + m_2)g = c\Delta_{c0}$ знайдемо статичну деформацію Δ_{c0} пружини з обома тягарями (положення ② на рис. 2) по відношенню до недеформованої пружини ①.

$$\Delta_{c0} = \frac{m_1 + m_2}{c} g .$$

Подальший (після зняття тягаря m_2) рух системи буде відбуватися навколо положення статичної рівноваги тягаря m_1 (лінія 0-0 на рис. 2), цей тягар m_1 замінимо матеріальною точкою B і знайдемо статичну

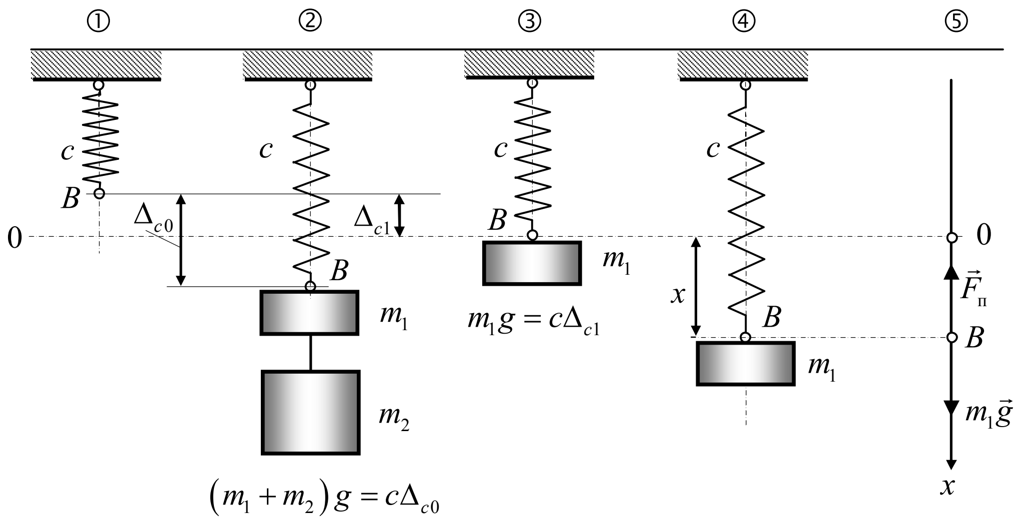


Рис. 2. До складання рівняння руху.

деформацію у цьому положенні ③: $\Delta_{c1} = \dfrac{m_1 g}{c}$. Тоді початкове відхилення т. B від положення рівноваги складатиме

$$x(0) = \Delta_{c0} - \Delta_{c1} = \frac{m_2 g}{c} = \frac{0{,}8\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2}{19{,}6\ \text{Н/м}} = 0{,}4\ \text{м}.$$

Далі скористаємося другим законом Ньютона у проекції на вісь x та діаграмою ⑤ рис. 2:

$$m_1\ddot{x} = m_1 g - c\left(x + \Delta_{c1}\right) \text{ або } m_1\ddot{x} + cx = 0,$$

звідки маємо

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}. \tag{1}$$

де $k = \sqrt{c/m_1} = \sqrt{\dfrac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}5\ \text{кг}}} = 2\pi$ рад/с - кругова частота власних коливань. Тоді

$$f = \frac{k}{2\pi} = 1\ \text{Гц},\ \text{а}\ T = f^{-1} = 1\ \text{с}.$$

Складаємо характеристичне рівняння (замінюючи в рівнянні (1) $\ddot{x} \to \lambda^2,\ \dot{x} \to \lambda,\ x \to 1$)

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

корені якого дорівнюють: $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Тоді загальний розв'зок лінійного однорідного диференціального рівняння (1) з постійними коефіцієнтами шукається у вигляді:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{2}$$

Для знаходження сталих інтегрування C_1 і C_2 знаходимо першу похідну від x за часом

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{3}$$

Підстановка початкових умов у вирази (2) і (3) дає:

$$x(0) = C_1 = 0{,}4 \text{ м}; \dot{x}(0) = C_2 k = 0,$$

звідки випливає, що $C_1 = 0{,}4$ м, а $C_2 = 0$.

Отже кінематичний закон руху матеріальної точки B (тягаря m_1) вздовж осі x має вигляд

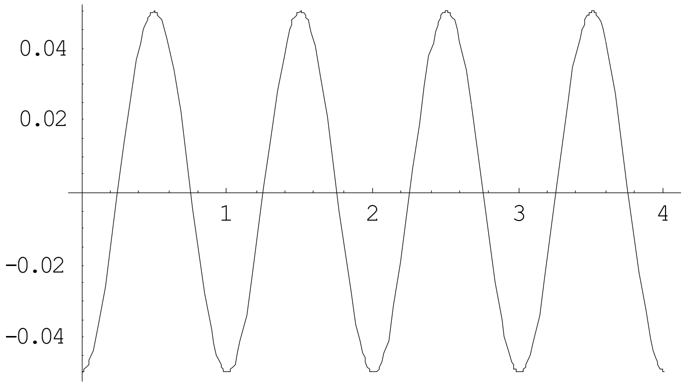
$$\boxed{x(t) = 0{,}4 \cos 6{,}28t \text{ м}}.$$

Висновок: тягар m_1 на пружині виконуватиме незгасаючі коливання з амплітудою $a = 0{,}4$ м, періодом $T = 1$ с ($f = 1$ Гц) за законом $x(t) = 0{,}4 \cos 6{,}28t$ м.

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m1=0.5; m2=0.8;c=19.6;
 soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == 0, x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t]
 {{x[t]→-0.05 Cos[k t]}}
 x[t]/.soln[[1]]
 -0.05 Cos[k t]
 xdot0 = 0; x0 = (9.8/c) m2; k = Sqrt[c/m1]
 6.26099
 %%/. k→ Sqrt[c/m1]
 -0.05 Cos[6.26099 t]
 qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify
```

```
-0.05 Cos[6.26099 t]
T = 2 Pi / k
1.00354
f=1/T
0.996468
Plot[qs,{t,0,4 T}]
```




```
-Graphics-
```

2. ЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

32.53. Пластинка D маси 100 г, що підвішена на пружині AB в нерухомій точці A, рухається між полюсами магніту. Внаслідок вихрових струмів рух гальмується силою, пропорціональною швидкості (рис. 1). Сила опору рухові дорівнює $k\text{v}\Phi^2$ Н, де $k = 0,001$, v - швидкість в м/с, Φ - магнітний потік між полюсами N і S. В початковий момент швидкість пластинки дорівнює нулю і пружина не розтягнута. Подовження її на 1 м утворюється при статичній дії сили у 19,6 Н, прикладеної в точці B. Визначити рух пластинки в тому разі, коли $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб (вебер – одиниця магнітного потоку в СІ).

Відповідь: $x = -e^{-2,5t}\left(0,05\cos 13,77t + 0,00907\sin 13,77t\right)$ м, де вісь x напрямлена вниз із положення статичної рівноваги центра ваги пластинки.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $R = k v \Phi^2$ Н, $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб; $x(0) = -\Delta_c$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

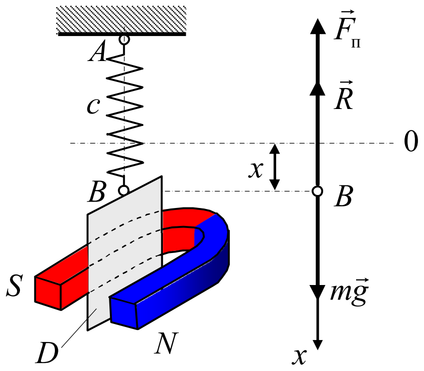


Рис. 1. Пластинка на пружині у магнітному полі постійного магніту.

Р о з в’ я з а н н я

Знайдемо спочатку статичну деформацію Δ_c пружини із умови рівноваги сили ваги $m\vec{g}$ і сили пружності $\vec{F}_п$ ($mg = c\Delta_c$) в положенні статичної рівноваги:

$$\Delta_c = \frac{mg}{c} = 5 \text{ см}.$$

Далі за діаграмою сил рис. 1, користуючись другим законом Ньютона, запишемо в проекції на вісь x

$$m\ddot{x} = mg - F_п - R,$$

або, враховуючи, що $F_п = c\left(x + \Delta_c\right)$, і вираз $mg = c\Delta_c$, отримаємо:

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \Delta_c) - h\dot{x},$$

де $h = k\Phi^2 = 0{,}001 \cdot 500 \text{ Вб}^2 = 0{,}5$ кг/с, і потім

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} - h\dot{x}, \text{ або } m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = 0.$$

Поділивши останнє рівняння на масу m, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0\,, \qquad (1)$$

де $2\varsigma = \dfrac{h}{m} = \dfrac{0{,}5\ \text{кг/с}}{0{,}1\ \text{кг}} = 5\ \text{рад/с}$, а $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}1\ \text{кг}}} = 14\ \text{рад/с}$.

Далі для рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0\,,$$

і знаходимо його корені: $\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}$.

Оскільки $\varsigma < k$, то маємо $\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm i\sqrt{k^2 - \varsigma^2} = -\varsigma \pm ik_*$, де

$$k_* = \sqrt{k^2 - \varsigma^2} = \sqrt{196\ \text{рад}^2/\text{с}^2 - 6{,}25\ \text{рад}^2/\text{с}^2} = 13{,}77\ \text{рад/с}.$$

Тоді $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x = e^{-\varsigma t}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right),$$

і знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = -\varsigma e^{-\varsigma t}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right) + e^{-\varsigma t}\left(-C_1 k_* \sin k_* t + C_2 k_* \cos k_* t\right).$$

Якщо в останні два рівняння підставити початкові умови, то отримаємо

$$x(0) = C_1 = -\Delta_c = -5\ \text{см};\ \dot{x}(0) = -\varsigma C_1 + k_* C_2 = 0,\ \text{звідки}$$

$$C_2 = \frac{\varsigma}{k_*} C_1 = -\frac{\varsigma}{k_*}\Delta_c = -0{,}907\ \text{см}.$$

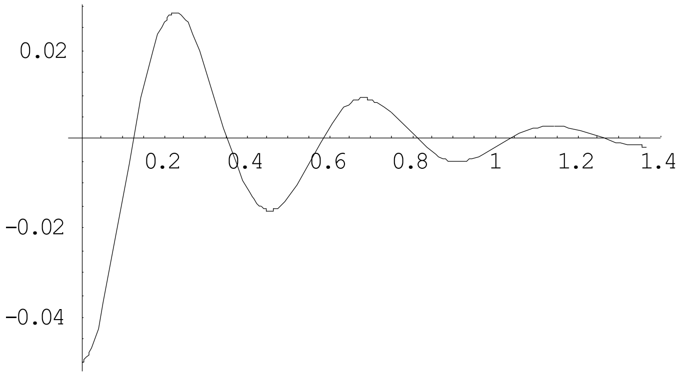
Тоді остаточно отримаємо

$$\boxed{x = -e^{-2{,}5t}\left(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t\right),\ \text{м}.}$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m = 0.1; c = 19.6; K = 0.001; Φ = 10 √5 ;
soln = DSolve[{x''[t] + 2 ς x'[t] + k^2 x[t] == 0,
    x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t];
x[t]/.soln[[1]];
xdot0=0;x0=-0.05;
%%/. {ς → K Φ^2/(2 m), k → √(c/m)}
```

```
(0. - 0.0362977 i) ((0.125 - 0.688749 i) e^((-2.5-13.775 i) t) -
    (0.125 + 0.688749 i) e^((-2.5+13.775 i) t))
qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
e^(-2.5t) (-0.05 Cos[13.775 t] - 0.00907443 Sin[13.775 t])
Period = 2 Pi / Sqrt[k^2 - ς^2] /. {ς → KΦ^2 / (2 m), k → Sqrt[c / m]}
0.45613
Plot[qs,{t,0,3 Period}, PlotRange→All]
```




```
-Graphics-
```

32.54. Визначити рух пластинки D за умов попередньої задачі в тому разі, коли магнітний потік $\Phi = 100$ Вб (див. рис.1 задачі **32.53**).

Відповідь: $x = -0{,}051e^{-2t} + 0{,}001e^{-98t}$ м.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $R = k\text{v}\Phi^2$ Н, $k = 0{,}001$, $\Phi = 100$ Вб; $x(0) = -\Delta_c$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

В даному разі маємо $h = k\Phi^2 = 0{,}001 \cdot 10000 \text{ Вб}^2 = 10$ кг/с**,** і потім

$$m\ddot{x} = \cancel{m}\cancel{g} - cx - \cancel{c}\Delta_c - h\dot{x}, \text{ або } m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = 0.$$

Поділивши останнє рівняння на масу m, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

де $2\varsigma = \dfrac{h}{m} = \dfrac{10 \text{ кг/с}}{0{,}1 \text{ кг}} = 100 \text{ рад/с}$, а $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6 \text{ Н/м}}{0{,}1 \text{ кг}}} = 14 \text{ рад/с}$.

Далі для рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0,$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}\ .$$

Оскільки $\varsigma > k$, то маємо

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2} = -50 \text{ рад}/\text{с} \pm \sqrt{2500 \text{ рад}^2/\text{с}^2 - 196 \text{ рад}^2/\text{с}^2} = -50\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \pm 48\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -2 \text{ рад/с}$ і $\lambda_2 = -98 \text{ рад/с}$ є дійсними різними, тому $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-98t},$$

і знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Якщо в останні два рівняння підставити початкові умови, то отримаємо

$$x(0) = C_1 + C_2 = -\Delta_c;\ \dot{x}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

звідки матимемо

$$C_1 = \frac{\lambda_2 \Delta_c}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-98 \text{ рад/с} \cdot 5 \text{ см}}{-2 \text{ рад/с} + 98 \text{ рад/с}} \approx -5{,}1 \text{ см} = -0{,}051 \text{ м};$$

$$C_2 = \frac{-\lambda_1 \Delta_c}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2 \text{ рад/с} \cdot 5 \text{ см}}{-2 \text{ рад/с} + 98 \text{ рад/с}} \approx 0{,}1 \text{ см} = 0{,}001 \text{ м}.$$

Тоді остаточно отримаємо

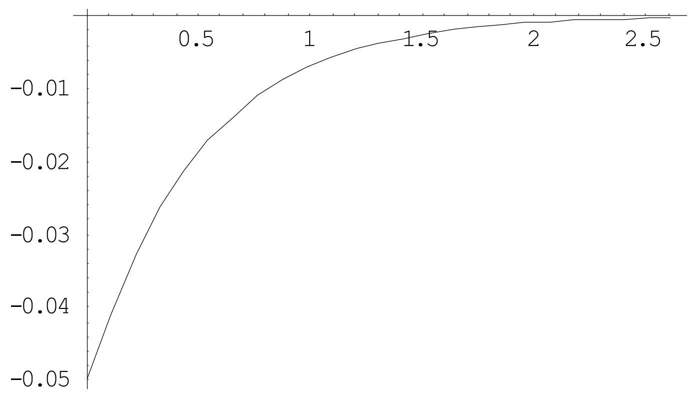
$$\boxed{x = -0{,}051 e^{-2t} + 0{,}001 e^{-98t} \text{ м}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;K=0.001;Φ=100;
soln = DSolve[{x''[t] + 2ξ x'[t] + k^2 x[t] == 0,
    x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t];
x[t]/.soln[[1]];
xdot0=0;x0=-0.05;
%% /. {ξ → KΦ^2 / (2m), k → √(c/m)}
-0.0000108507 (-96. e^(-98.t) + 4704. e^(-2.t))
qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
0.00104167 e^(-98.t) - 0.0510417 e^(-2.t)
Period = 2Pi/√(ξ^2 - k^2) /. {ξ → KΦ^2 / (2m), k → √(c/m)}
0.1309
```

Період визначається умовно, оскільки □>k !!!

```
Plot[qs,{t,0,20 Period},PlotRange→All]
```




```
-Graphics-
```

32.71. Тягар маси 100 г, підвішений до кінця пружини, рухається у рідині. Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 19{,}6$ Н/м. Сила опору рухові пропорційна першому ступеню швидкості тягаря: $R = \alpha v$, де $\alpha = 3{,}5$ Н$\cdot$с/м.

Знайти рівняння руху тягаря, якщо у початковий момент тягар був зміщений із положення рівноваги на $x_0 = 1$ см і відпущений без початкової швидкості.

Відповідь: $x = 1{,}33e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $R = \alpha v$ Н, $\alpha = 3{,}5$ Н$\cdot$с/м; $x(0) = x_0 = 1$ см, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в’ я з а н н я

Тягар будемо вважати матеріальною точкою, прикріпленою до кінця пружини. Рух цієї точки описується другим законом Ньютона у проекції на вертикальну вісь x, напрямлену донизу:

$$m\ddot{x} = mg - R - F_{\text{п}},$$

або, враховуючи, що $F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right)$, а $\text{v} = \dot{x}$ -

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} - \alpha\dot{x}, \text{ або } m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0.$$

Поділивши останнє рівняння на масу m, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

де $2\varsigma = \dfrac{\alpha}{m} = \dfrac{3{,}5 \text{ кг/с}}{0{,}1 \text{ кг}} = 35 \text{ рад/с}$, а $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6 \text{ Н/м}}{0{,}1 \text{ кг}}} = 14 \text{ рад/с}$.

Далі для рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0,$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}.$$

Оскільки $\varsigma > k$, то маємо

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2} = -17{,}5 \text{ рад/с} \pm \sqrt{306{,}25 \text{ рад}^2/\text{с}^2 - 196 \text{ рад}^2/\text{с}^2} =$$
$$= -17{,}5 \text{ рад/с} \pm 10{,}5 \text{ рад/с}.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -7$ рад/с і $\lambda_2 = -28$ рад/с є дійсними різними, тому $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-28t},$$

і знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Якщо в останні два рівняння підставити початкові умови, то отримаємо

$$x(0)=C_1+C_2=x_0\,;\ \dot{x}(0)=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=0\,,$$

звідки матимемо

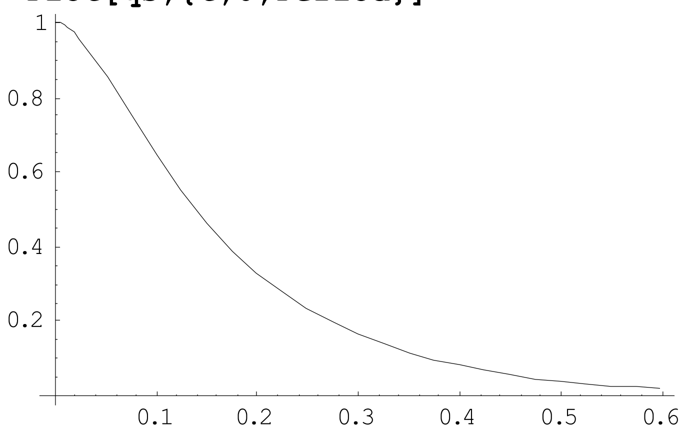
$$C_1=\frac{-\lambda_2 x_0}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{28\ \text{рад/с}\cdot 1\ \text{см}}{-7\ \text{рад/с}+28\ \text{рад/с}}\approx 1{,}33\ \text{см};$$
$$C_2=\frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{-7\ \text{рад/с}\cdot 1\ \text{см}}{-7\ \text{рад/с}+28\ \text{рад/с}}\approx -0{,}33\ \text{см}\,.$$

Тоді остаточно отримаємо

$$\boxed{x=1{,}33e^{-7t}-0{,}33e^{-28t}\ \text{см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;α=3.5;
 soln = DSolve[{x''[t] + 2 ξ x'[t] + k^2 x[t] == 0,
     x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0;x0=1;
 %% /. {ξ → α / (2 m), k → √(c/m)}
 0.047619 (-7. e^(-28. t) + 28. e^(-7. t))
 qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
 -0.333333 e^(-28. t) + 1.33333 e^(-7. t)
 Period = 2 Pi / √(ξ^2 - k^2) /. {ξ → α / (2 m), k → √(c/m)}
 0.598399
 Plot[qs,{t,0,Period}]
```



-Graphics-

32.72. За умови попередньої задачі знайти рівняння руху тягаря і побудувати графік залежності переміщення від часу, якщо у початковий момент тягар зміщений із положення статичної рівноваги на відстань $x_0 = 1$ см і йому надана початкова швидкість 50 см/с у напрямку, протилежному до переміщення.

Відповідь: $x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $R = \alpha \mathrm{v}$ Н, $\alpha = 3{,}5$ Н $\cdot$ с/м; $x(0) = x_0 = 1$ см, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -50$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

В даному разі рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

де $2\varsigma = \dfrac{\alpha}{m} = \dfrac{3{,}5\ \text{кг/с}}{0{,}1\ \text{кг}} = 35$ рад/с, а $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}1\ \text{кг}}} = 14$ рад/с.

Далі для рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0,$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}.$$

Оскільки $\varsigma > k$, то маємо

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2} = -17{,}5\ \text{рад/с} \pm \sqrt{306{,}25\ \text{рад}^2/\text{с}^2 - 196\ \text{рад}^2/\text{с}^2} =$$
$$= -17{,}5\ \text{рад/с} \pm 10{,}5\ \text{рад/с}.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -7$ рад/с і $\lambda_2 = -28$ рад/с є дійсними різними, тому $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-28t},$$

і знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Якщо в останні два рівняння підставити початкові умови, то отримаємо

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0;\ \dot{x}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{x}_0,$$

звідки матимемо

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-50\ \text{см/с} + 28\ \text{рад/с} \cdot 1\ \text{см}}{-7\ \text{рад/с} + 28\ \text{рад/с}} \approx -1\ \text{см};$$

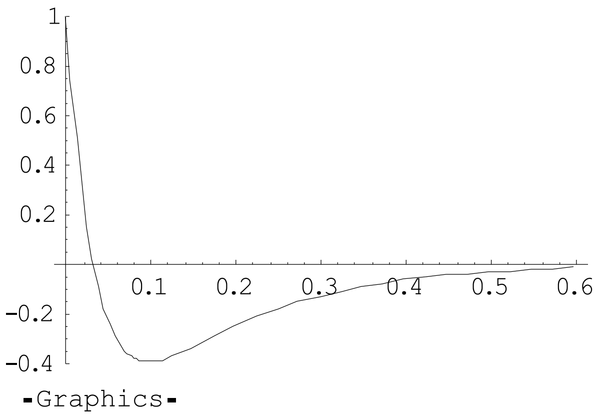
$$C_2 = \frac{-\dot{x}_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{50\ \text{см/с} - 7\ \text{рад/с} \cdot 1\ \text{см}}{-7\ \text{рад/с} + 28\ \text{рад/с}} \approx 2\ \text{см}.$$

Тоді остаточно отримаємо

$$\boxed{x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}\ \text{см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;α=3.5;
soln = DSolve[{x''[t] + 2 ξ x'[t] + k^2 x[t] == 0,
    x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t];
x[t]/.soln[[1]];
xdot0=-50;x0=1;
%%/. {ξ → α/(2 m), k → √(c/m)}
0.047619 (43. ⅇ^(-28. t) - 22. ⅇ^(-7. t))
qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
2.04762 ⅇ^(-28. t) - 1.04762 ⅇ^(-7. t)
Period = 2 Pi / √(ξ^2 - k^2) /. {ξ → α/(2 m), k → √(c/m)}
0.598399
Plot[qs,{t,0,Period},PlotRange→{-.4,1.}]
```



32.73. За умови задачі 32.71 в початковий момент тягар зміщений із положення рівноваги на відстань $x_0 = 5$ см і йому надана початкова швидкість $\mathrm{v}_0 = 100$ см/с в тому ж напрямку. Знайти рівняння руху тягаря і побудувати графік залежності переміщення від часу.

Відповідь: $x = 11{,}4e^{-7t} - 6{,}4e^{-28t}$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $R = \alpha \mathrm{v}$ Н, $\alpha = 3{,}5$ Н·с/м; $x(0) = x_0 = 5$ см, $\dot{x}(0) = \mathrm{v}_0 = 100$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

В даному разі рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

де $2\varsigma = \dfrac{\alpha}{m} = \dfrac{3{,}5 \text{ кг/с}}{0{,}1 \text{ кг}} = 35$ рад/с, а $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6 \text{ Н/м}}{0{,}1 \text{ кг}}} = 14$ рад/с.

Далі для рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0,$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}.$$

Оскільки $\varsigma > k$, то маємо

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2} = -17{,}5 \text{ рад/с} \pm \sqrt{306{,}25 \text{ рад}^2/\text{с}^2 - 196 \text{ рад}^2/\text{с}^2} =$$
$$= -17{,}5 \text{ рад/с} \pm 10{,}5 \text{ рад/с}.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -7$ рад/с і $\lambda_2 = -28$ рад/с є дійсними різними, тому $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-28t},$$

і знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Якщо в останні два рівняння підставити початкові умови, то отримаємо

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0;\ \dot{x}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \mathrm{v}_0,$$

звідки матимемо

$$C_1 = \frac{\mathrm{v}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{100 \text{ см/с} + 28 \text{ рад/с} \cdot 5 \text{ см}}{-7 \text{ рад/с} + 28 \text{ рад/с}} \approx 11{,}4 \text{ см};$$
$$C_2 = \frac{-\mathrm{v}_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-100 \text{ см/с} - 7 \text{ рад/с} \cdot 5 \text{ см}}{-7 \text{ рад/с} + 28 \text{ рад/с}} \approx -6{,}4 \text{ см}.$$

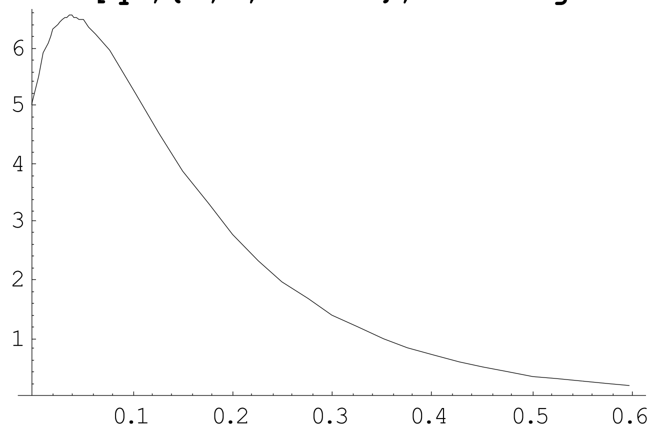
Тоді остаточно отримаємо

$$\boxed{x = 11{,}4 e^{-7t} - 6{,}4 e^{-28t} \text{ см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;α=3.5;
 soln = DSolve[{x''[t] + 2ξ x'[t] + k^2 x[t] == 0,
     x'[0] == xdot0, x[0] == x0}, x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=100;x0=5;
 %%/. {ξ → α/(2 m), k → √(c/m)}
 0.047619 (-135. e^(-28. t) + 240. e^(-7. t))
 qs=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
 -6.42857 e^(-28. t) + 11.4286 e^(-7. t)
```

```
Period = 2 Pi / Sqrt[ξ^2 - k^2] /. {ξ → α / (2 m), k → Sqrt[c / m]}
0.598399
Plot[qs,{t,0,Period},PlotRange→All]
```



```
-Graphics-
```

3. ЗМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Коливання за відсутності сил опору

32.81. На пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 19{,}6$ Н/м, підвішений магнітний стрижень маси 100 г (рис. 1). Нижній кінець магніту проходить через котушку, через яку йде змінний струм $i = 20\sin 8\pi t$ А. Струм йде з моменту часу $t = 0$, втягуючи стрижень у соленоїд; до цього моменту магнітний стрижень висів на пружині нерухомо. Сила взаємодії між магнитом і котушкою визначається рівністю $F = 0{,}016\pi i$ Н.

Визначити змушені коливання магніту.

Відповідь: $x_2 = -2{,}3\sin 8\pi t$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $i = 20\sin 8\pi t$ А, $F = 0{,}016\pi i$ Н; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x_2(t)$.

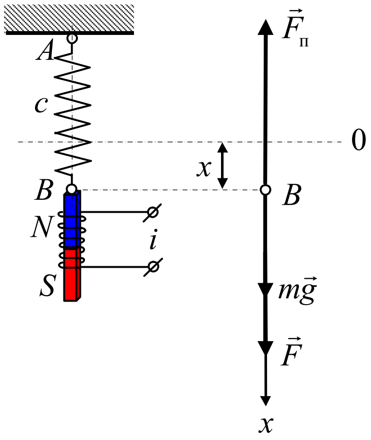


Рис. 1. Пластинка на пружині під дією збурюючої сили.

Р о з в’ я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_п + \vec{F},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що $F_п = c\left(x + \Delta_c\right)$, а $F = F_0 \sin \omega t$ ($F_0 = 0{,}016\pi \cdot 20\ \text{Н} = 0{,}32\pi\ \text{Н}$; $\omega = 8\pi$ рад/с), -

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} + F_0 \sin \omega t,$$

і поділивши на масу m -

$$\ddot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

$f_0 = F_0 / m = 3{,}2\pi$ м/с^2; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}1\ \text{кг}}} = 14$ рад/с.

Оскільки права частина рівняння (1) є гармонійною функцією, а демпфірування у системі відсутнє (тобто зліва немає членів з $\dot{x}$), то будемо шукати частинний розв’язок x_2 рівняння (1), який визначає змушені коливання магніту, у вигляді

$$x_2 = U \sin \omega t, \tag{2}$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -U\omega^2 \sin \omega t. \tag{3}$$

Якщо підставити вирази (2) і (3) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-U\omega^2 \sin \omega t + k^2 U \sin \omega t = f_0 \sin \omega t,$$

звідки неважко знайти, що $U\left(k^2 - \omega^2\right) = f_0$, а

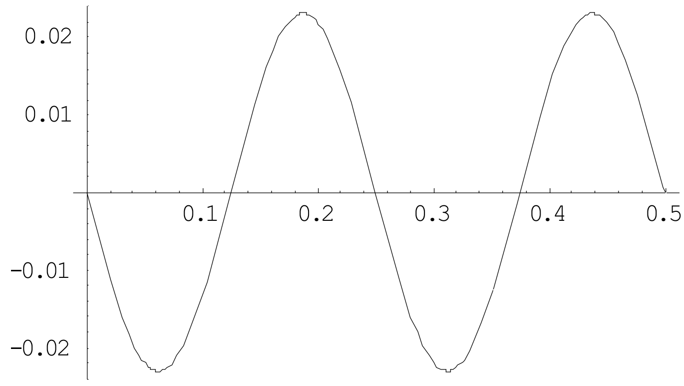
$$U = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} = \frac{3{,}2\pi \text{ м/с}^2}{196 \text{ рад}^2/\text{с}^2 - 631 \text{ рад}^2/\text{с}^2} = -0{,}023 \text{ м} = -2{,}3 \text{ см}.$$

Отже остаточно отримуємо

$$\boxed{x_2(t) = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = -2{,}3 \sin 8\pi t \text{ см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;A=20;i=A Sin[ω t];K=0.016;F=K π i;
 soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == xdot0,
     x[0] == x0}, x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0; x0=0;
 %%/. {k→ √(c/m), a→ K π A/m, ω → 8 π};
 x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
 0.0414256 Sin[14. t]-0.0230758 Sin[25.1327 t]
 U=Coefficient[x, Sin[ω t]/.ω→8. π]
 -0.0230758
 W=Coefficient[x, Cos[ω t]/.ω→8. π]
 0
 x2=U Sin[ω t]+W Cos[ω t]/.ω→8 π
 -0.0230758 Sin[8 π t]
 PeriodFree = 2π/k /. k→ √(c/m)
 0.448799
 PeriodForced = 2π/ω /. ω → 8 π
 1/4
 Plot[Evaluate[x2],{t,0,2 PeriodForced}]
```



-Graphics-

32.82. За умови попередньої задачі знайти рівняння руху магнітного стрижня, якщо його підвісили до кінця нерозтягнутої пружини і відпустили без початкової швидкості.

Відповідь: $x = -5\cos 14t + 4{,}13\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $i = 20\sin 8\pi t$ А, $F = 0{,}016\pi i$ Н; $x(0) = -\Delta_c$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1 задачі **32.81**):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{п}} + \vec{F},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що

$$F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right), \text{ а } \Delta_c = \frac{mg}{c} = \frac{0{,}1 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2}{19{,}6 \text{ Н/м}} = 0{,}05 \text{ м} = 5 \text{ см},$$

отримаємо

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} + F,$$

Крім цього $F = F_0 \sin\omega t$ ($F_0 = 0{,}016\pi \cdot 20$ Н $= 0{,}32\pi$ Н; $\omega = 8\pi$ рад/с). Тоді, поділивши на масу m, матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t, \qquad (1)$$

де $f_0 = F_0 / m = 3{,}2\pi$ м/с^2; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6 \text{ Н/м}}{0{,}1 \text{ кг}}} = 14$ рад/с.

Загальний розв'язок $x(t)$ неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \qquad (2)$$

і частинного розв'язку x_2 вихідного рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (чисто уявні, спряжені), для яких x_1 матиме вигляд

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (3)$$

Оскільки права частина рівняння (1) є гармонійною функцією, а демпфірування у системі відсутнє (тобто зліва немає членів з $\dot{x}$), то будемо шукати x_2 у вигляді

$$x_2 = U \sin \omega t, \qquad (4)$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -U\omega^2 \sin \omega t. \qquad (5)$$

Якщо підставити вирази (4) і (5) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-U\omega^2 \sin \omega t + k^2 U \sin \omega t = f_0 \sin \omega t,$$

звідки неважко знайти, що $U\left(k^2 - \omega^2\right) = f_0$, а

$$U=\frac{f_0}{k^2-\omega^2}=\frac{3{,}2\pi\ \text{м/с}^2}{196\ \text{рад}^2/\text{с}^2-631\ \text{рад}^2/\text{с}^2}=-0{,}023\ \text{м}=-2{,}3\ \text{см}\,.$$

Отже маємо

$$x_2=\frac{f_0}{k^2-\omega^2}\sin\omega t=-2{,}3\ \sin 8\pi\text{t}\ \text{см}\,.$$

Таким чином для $x(t)$ маємо наступний вираз:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{f_0}{k^2-\omega^2}\sin\omega t\,. \qquad (6)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (6) за часом

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+\frac{f_0\omega}{k^2-\omega^2}\cos\omega t\,. \qquad (7)$$

Підставляючи далі у вирази (6) і (7) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0)=C_1=-\Delta_c, \\ \dot{x}(0)=C_2k+\dfrac{f_0\omega}{k^2-\omega^2}=0. \end{cases} \qquad (8)$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1=-\Delta_c,\ C_2=\frac{\omega}{k}\cdot\frac{f_0}{\left(\omega^2-k^2\right)}\,.$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

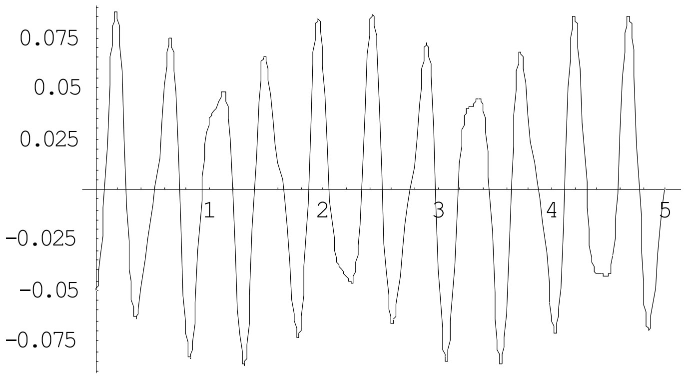
$$x(t)=-\Delta_c\cos kt+\frac{\omega}{k}\cdot\frac{f_0}{\omega^2-k^2}\sin kt-\frac{f_0}{\omega^2-k^2}\sin\omega t\,,$$

або, після підстановки чисельних значень параметрів, матимемо

$$\boxed{x(t)=-5\cos 14t+4{,}13\sin 14t-2{,}3\sin 8\pi t\ \text{см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;A=20;i=A Sin[ω t];K=0.016;F=K π i;
 soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == 0,
     x[0] == -0.05}, x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 %/. {k→ √(c/m), a→ K π A/m, ω → 8 π};
 x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
 -0.05 Cos[14. t]+0.0414256 Sin[14. t]-0.0230758 Sin[25.1327
t]
 PeriodFree = 2π/k /. k→ √(c/m)
 0.448799
 PeriodForced = 2π/ω /. ω → 8 π
 1/4
 Plot[Evaluate[x],{t,0,20 PeriodForced},PlotPoints→200]
```




```
-Graphics-
```

32.83. За умови задачі 32.81 знайти рівняння руху магнітного стрижня, якщо йому у положенні статичної рівноваги надали початкову швидкість $v_0 = 5$ см/с.

Відповідь: $x = 4{,}5\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$ см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $i = 20\sin 8\pi t$ А, $F = 0{,}016\pi i$ Н; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 = 5$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

Оскільки порівняно із умовою задачі **32.82** тут змінилися лише початкові умови, то розв'язання задач буде співпадати до рівнянь (7) включно, а використання початкових умов у виразах (6) і (7) дає наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 0, \\ \dot{x}(0) = C_2 k + \dfrac{f_0 \omega}{k^2 - \omega^2} = \text{v}_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Розв'язуючи цю систему відносно C_1 і C_2, матимемо

$C_1 = 0,$

$$C_2 = \frac{1}{k}\left(\text{v}_0 + \frac{f_0\omega}{\omega^2 - k^2}\right) = \frac{1}{14\ \text{рад/с}}\left(5\ \text{см/с} + \frac{320\pi\ \text{см/с}^2 \cdot 8\pi\ \text{рад/с}}{631\ \text{рад}^2/\text{с}^2 - 196\ \text{рад}^2/\text{с}^2}\right) = 4{,}5\ \text{см}.$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{k}\left(\text{v}_0 + \frac{f_0\omega}{\omega^2 - k^2}\right)\sin kt - \frac{f_0}{\omega^2 - k^2}\sin\omega t,$$

або, після підстановки чисельних значень параметрів, отримаємо

$$\boxed{x(t) = 4{,}5\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t\ \text{см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.1;c=19.6;A=20;i=A Sin[ω t];K=0.016;
 soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == xdot0,
     x[0] == x0}, x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0.05; x0=0;
 %%/. {k→ √(c/m), a→ K π A/m, ω → 8 π};
 x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
 0.0449971 Sin[14. t]-0.0230758 Sin[25.1327 t]
 PeriodFree = 2π/k /. k→ √(c/m)
 0.448799
```

```
PeriodForced = 2π/ω /. ω → 8π
1/4
Plot[Evaluate[x],{t,0,20 PeriodForced},PlotPoints→200]
```

-Graphics-

32.89. Тягар масою $m = 200$ г, підвішений до пружини, коефіцієнт жорсткості якої $9{,}8$ Н/см, знаходиться під дією сили $S = H\sin pt$, де $H = 20$ Н, $p = 50$ рад/с. В початковий момент $x_0 = 2$ см, $\mathrm{v}_0 = 10$ см/с. Початок координат вибраний у положенні статичної рівноваги. Знайти рівняння руху тягаря.

Відповідь: $x = 2\cos 70t - 2{,}83\sin 70t + 4{,}17\sin 50t$ см.

Дано: $m = 0{,}2$ кг, $c = 9{,}8$ Н/см; $S = H\sin pt$ Н, $H = 20$ Н, $p = 50$ рад/с; $x(0) = x_0 = 2$ см, $\dot{x}(0) = \mathrm{v}_0 = 10$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в’ я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1 задачі **32.81**, замінюючи збурюючу силу $\vec{F}$ на $\vec{S}$):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{п}} + \vec{S},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що

$$F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right),\ \text{а}\ \Delta_c = \frac{mg}{c},$$

отримаємо

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c}\cancel{\Delta}_c + S.$$

Крім цього $S = H\sin pt$. Тоді, поділивши на масу m, матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

де $f_0 = H/m = \dfrac{20\ \text{Н}}{0{,}2\ \text{кг}} = 100\ \text{м/с}^2$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{980\ \text{Н/см}}{0{,}2\ \text{кг}}} = 70\ \text{рад/с}$.

Загальний розв’язок $x(t)$ неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді суми загального розв’язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \tag{2}$$

і частинного розв’язку x_2 вихідного рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (чисто уявні, спряжені), для яких x_1 матиме вигляд

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Оскільки права частина рівняння (1) є гармонійною функцією, а демпфірування у системі відсутнє (тобто зліва немає членів з $\dot{x}$), то будемо шукати x_2 у вигляді

$$x_2 = U \sin pt, \tag{4}$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -Up^2 \sin pt . \tag{5}$$

Якщо підставити вирази (4) і (5) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-Up^2 \sin pt + k^2 U \sin pt = f_0 \sin pt ,$$

звідки неважко знайти, що $U\left(k^2 - p^2\right) = f_0$, а

$$U = \frac{f_0}{k^2 - p^2} = \frac{100 \text{ м/с}^2}{4900 \text{ рад}^2/\text{с}^2 - 2500 \text{ рад}^2/\text{с}^2} = 0{,}0417 \text{ м} = 4{,}17 \text{ см} .$$

Отже маємо

$$x_2 = \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin pt = 4{,}17 \sin 50t \text{ см} .$$

Таким чином для $x(t)$ маємо наступний вираз:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin pt . \tag{6}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (6) за часом

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{f_0 p}{k^2 - p^2} \cos pt . \tag{7}$$

Підставляючи далі у вирази (6) і (7) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = x_0, \\ \dot{x}(0) = C_2 k + \dfrac{f_0 p}{k^2 - p^2} = \mathrm{v}_0. \end{cases} \tag{8}$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = x_0,\ C_2 = \frac{1}{k}\left(\mathrm{v}_0 - \frac{f_0 p}{k^2 - p^2} \right).$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

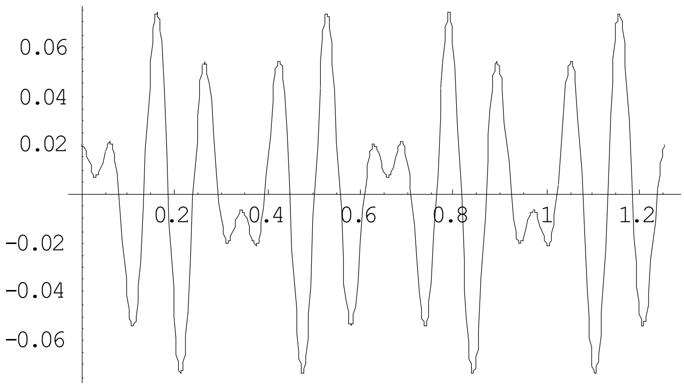
$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(\mathrm{v}_0 - \frac{f_0 p}{k^2 - p^2} \right)\sin kt + \frac{f_0}{k^2 - p^2}\sin pt,$$

або, після підстановки чисельних значень параметрів, остаточно матимемо

$$\boxed{x(t) = 2\cos 70t - 2{,}83\sin 70t + 4{,}17\sin 50t \text{ см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=0.2;c=980;H=20;
soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == 0.1,
    x[0] == 0.02}, x[t], t];
x[t]/.soln[[1]];
xdot0=0.1; x0=0.02;
%%/. {k→ √(c/m), a→ H/m, ω → 50};
x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop
0.02 Cos[70. t]+0.0416667 Sin[50. t]-0.0283333 Sin[70. t]
PeriodFree = 2π/k /. k→ √(c/m)
0.0897598
PeriodForced = 2π/ω /. ω → 50
π/25
Plot[Evaluate[x],{t,0,10 PeriodForced},PlotPoints→200]
```




```
-Graphics-
```

3.2. Резонансні коливання за відсутності сил опору

32.90. За умови попередньої задачі змінилася частота збурюючої сили, отримавши значення $p = 70$ рад/с. Знайти закон руху тягаря.

Відповідь: $x = 2\cos 70t + 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t$ см.

Дано: $m = 0{,}2$ кг, $c = 9{,}8$ Н/см; $S = H\sin pt$ Н, $H = 20$ Н, $p = 70$ рад/с; $x(0) = x_0 = 2$ см, $\dot{x}(0) = \mathrm{v}_0 = 10$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

Вказана в умові задачі зміна частоти збурюючої сили призводить до того, що вона (частота) буде збігатися із власною частотою коливальної системи, тобто p дорівнюватиме k. Фізичне явище, яке супроводжує такий збіг частот p і k отримало назву *резонансу*.

З математичної точки зору попереднє розв'язання стосовно x_1 в даному випадку зберігається повністю, а відмінності матимуть місце лише при пошуку x_2.

В даному разі x_2 шукається у вигляді

$$x_2 = \left(U\sin pt + W\cos pt\right)t, \tag{1}$$

тоді $\ddot{x}_2$ набуває форми

$$\ddot{x}_2 = \left(-Up^2\sin pt - Wp^2\cos pt\right)t + 2Up\cos pt - 2Wp\sin pt. \tag{2}$$

Якщо тепер підставити вирази (1) і (2) у вихідне рівняння (1) задачі **32.89**, то отримуємо таке рівняння:

$$\left(-Up^2\sin pt - Wp^2\cos pt\right)t + 2Up\cos pt - 2Wp\sin pt +$$
$$+ k^2\left(U\sin pt + W\cos pt\right) = f_0\sin pt.$$

Прирівнюючи у цьому виразі коефіцієнти біля $\sin pt$ і $\cos pt$ зправа і зліва, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення U і W:

$$\begin{cases} \left(k^2-p^2\right)tU-2pW=f_0, \\ 2pU+\left(k^2-p^2\right)tW=0. \end{cases}$$

Розв’яжемо ці рівняння за методом Крамера.

Головний визначник Δ системи та визначники Δ_U, Δ_W змінних U і W відповідно дорівнюють:

$$\Delta=\left(k^2-p^2\right)^2t^2+4p^2,\ \ \Delta_U=f_0\left(k^2-p^2\right)t,\ \ \Delta_W=-2pf_0.$$

Тоді коефіцієнти U і W дорівнюватимуть

$$U=\frac{\Delta_U}{\Delta}=\frac{f_0\left(k^2-p^2\right)t}{\left(k^2-p^2\right)^2t^2+4p^2}=0,$$

$$W=\frac{\Delta_W}{\Delta}=\frac{-2pf_0}{\left(k^2-p^2\right)^2t^2+4p^2}=\frac{-2pf_0}{4p^2}=\frac{-f_0}{2p}=\frac{-10^4\ \text{см/с}^2}{2\cdot 70\ \text{рад/с}}=-71{,}4\ \text{см/с},$$

оскільки $p=k$;

Таким чином для $x(t)$ маємо наступний вираз:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+Wt\cos pt. \tag{3}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (3) за часом

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+W\cos pt-Wpt\sin pt. \tag{4}$$

Підставляючи далі у вирази (3) і (4) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0)=C_1=x_0, \\ \dot{x}(0)=C_2k+W=\mathrm{v}_0. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язуючи цю систему відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = x_0 = 2 \text{ см}, \; C_2 = \frac{1}{k}\left(\mathrm{v}_0 + \frac{f_0}{2p} \right) = 1{,}16 \text{ см}.$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(\mathrm{v}_0 + \frac{f_0}{2p} \right)\sin kt + Wt\cos pt,$$

або, після підстановки чисельних значень параметрів, остаточно матимемо

$$\boxed{x(t) = 2\cos 70t + 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t \text{ см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
soln = DSolve[x''[t] + k^2 x[t] == 0, x[t], t]
 {{x[t]→C[1] Cos[k t]+C[2] Sin[k t]}}
 x1=x[t]/.soln[[1]]
 C[1] Cos[k t]+C[2] Sin[k t]
 x2=U t Sin[ω t]+W t Cos[ω t]
 t W Cos[t ω]+t U Sin[t ω]
 α=D[x2,t]
 W Cos[t ω]+t U ω Cos[t ω]+U Sin[t ω]-t W ω Sin[t ω]
 β=D[x2,{t,2}]
 2 U ω Cos[t ω] - t W ω^2 Cos[t ω] - 2 W ω Sin[t ω] - t U ω^2 Sin[t ω]
 γ = β + k^2 x2
 2 U ω Cos[t ω] - t W ω^2 Cos[t ω] - 2 W ω Sin[t ω] -
  t U ω^2 Sin[t ω] + k^2 (t W Cos[t ω] + t U Sin[t ω])
 Coefficient[γ,Sin[ω t]]
 k^2 t U - 2 W ω - t U ω^2
 Coefficient[γ,Cos[ω t]]
 k^2 t W + 2 U ω - t W ω^2
 Solve[{Coefficient[γ,Sin[ω t]]==a,Coefficient[γ,Cos[ω
t]]==0},{U,W}]
 {{U → -a (k^2 t - t ω^2)/(-4 ω^2 - (k^2 t - t ω^2)^2), W → 2 a ω/(-4 ω^2 - (k^2 t - t ω^2)^2)}}
 %/.k→ω
 {{U → 0, W → -a/(2 ω)}}
 qs=%[[1]]
 {U → 0, W → -a/(2 ω)}
```

```
x2=x2/.qs
```

$$-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}$$

```
x=x1+x2
```

$$C[1]\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+C[2]\,\mathrm{Sin}[k\,t]$$

```
xdot=D[x,t]
```

$$k\,C[2]\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}-k\,C[1]\,\mathrm{Sin}[k\,t]+\frac{1}{2}\,a\,t\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]$$

```
xnul=x/.t→0;xdotnul=xdot/.t→0
```

$$-\frac{a}{2\,\omega}+k\,C[2]$$

```
Solve[{xnul==x0,xdotnul==xdot0},{C[1],C[2]}]
```

$$\left\{\left\{C[1]\to x0,\ C[2]\to\frac{a+2\,xdot0\,\omega}{2\,k\,\omega}\right\}\right\}$$

```
qs2=x/.%[[1]]
```

$$x0\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+\frac{(a+2\,xdot0\,\omega)\,\mathrm{Sin}[k\,t]}{2\,k\,\omega}$$

```
%/.k→ω
```

$$x0\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+\frac{(a+2\,xdot0\,\omega)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{2\,\omega^2}$$

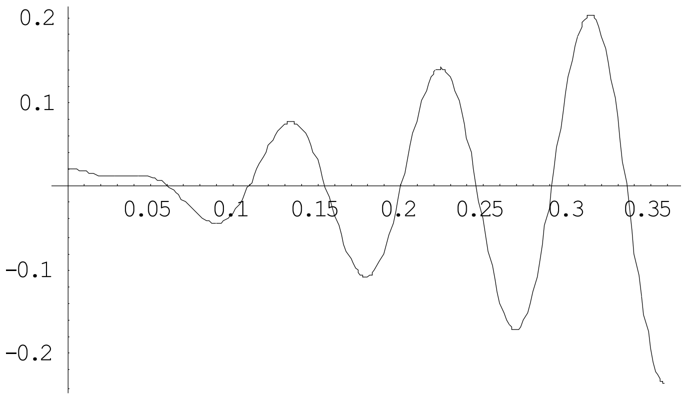
```
m=0.2;c=980;H=20;x0=0.02;xdot0=0.1;
%%/.{a→H/m,ω→70.}
0.02 Cos[70. t]-0.714286 t Cos[70. t]+0.0116327 Sin[70. t]
qs3=FullSimplify[%]//Chop
(0.02 -0.714286 t) Cos[70. t]+0.0116327 Sin[70. t]
```

$$\mathrm{PeriodFree}=\frac{2\,\pi}{k}\ /.\ k\to\sqrt{c/m}$$

```
0.0897598
```

$$\mathrm{PeriodForced}=\frac{2\,\pi}{\omega}\ /.\ \omega\to 70.$$

```
0.0897598
Plot[Evaluate[qs3],{t,0,4PeriodForced},PlotPoints→200]
```




```
-Graphics-
```

32.91. Тягар маси 24,5 кг висить на пружині жорсткості 392 Н/м. На тягар починає діяти сила $F(t) = 156{,}8 \sin 4t$ Н. Визначити закон руху тягаря.

Відповідь: $x = 0{,}2 \sin 4t - 0{,}8t \cos 4t$ м.

Дано: $m = 24{,}5$ кг, $c = 392$ Н/м; $F(t) = 156{,}8 \sin 4t$ Н; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1 задачі **32.81**):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{п}} + \vec{F},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що

$$F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right), \text{ а } \Delta_c = \frac{mg}{c},$$

отримаємо

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} + F.$$

Крім цього $F = F_0 \sin \omega t$, де $F_0 = 156{,}8$ Н, а $\omega = 4$ рад/с. Тоді, поділивши на масу m, матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

де $f_0 = F_0 / m = \dfrac{156{,}8 \text{ Н}}{24{,}5 \text{ кг}} = 6{,}4 \text{ м/с}^2$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{392 \text{ Н/см}}{24{,}5 \text{ кг}}} = 4$ рад/с. Отже, в системі матиме місце *резонанс* (оскільки $\omega = k$).

Загальний розв'язок $x(t)$ неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \tag{2}$$

і частинного розв'язку x_2 вихідного рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (чисто уявні, спряжені), для яких x_1 матиме вигляд

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Частинний розв'язок x_2 з огляду на резонанс будемо шукати у вигляді

$$x_2 = \left(U \sin \omega t + W \cos \omega t\right) t, \tag{4}$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -\left(U\omega^2 \sin \omega t + W\omega^2 \cos \omega t\right) t + 2U\omega \cos \omega t - 2W\omega \sin \omega t. \tag{5}$$

Якщо підставити вирази (4) і (5) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-\left(U\omega^2 \sin \omega t + W\omega^2 \cos \omega t\right) t + 2U\omega \cos \omega t - 2W\omega \sin \omega t +$$
$$+ k^2 t\left(U \sin \omega t + W \cos \omega t\right) = f_0 \sin \omega t.$$

Прирівнюючи у цьому виразі коефіцієнти біля $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ зправа і зліва, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення U і W:

$$\begin{cases} \left(k^2 - \omega^2\right) tU - 2\omega W = f_0, \\ 2\omega U + \left(k^2 - \omega^2\right) tW = 0. \end{cases}$$

За умови $\omega = k$ отримаємо

$$\begin{cases} -2\omega W = f_0, \\ 2\omega U = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $U = 0,\ \ W = \dfrac{-f_0}{2\omega}$. Отже маємо $x_2 = -\dfrac{f_0 t}{2\omega} \cos \omega t$.

Таким чином для $x(t)$ отримаємо наступний вираз:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{f_0 t}{2\omega} \cos \omega t. \tag{6}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (6) за часом

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{f_0}{2\omega} \cos \omega t + \frac{f_0 t}{2} \sin \omega t. \tag{7}$$

Підставляючи далі у вирази (6) і (7) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 0, \\ \dot{x}(0) = C_2 k - \dfrac{f_0}{2\omega} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = 0, \ C_2 = \frac{f_0}{2\omega k}.$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega k} \sin kt - \frac{f_0 t}{2\omega} \cos \omega t,$$

або, після підстановки чисельних значень параметрів (тоді $\frac{f_0}{2\omega} = \frac{6,4 \text{ м/с}^2}{2 \cdot 4 \text{ рад/с}} = 0,8 \text{ м/с}$; $\frac{f_0}{2\omega k} = \frac{0,8 \text{ м/с}}{4 \text{ рад/с}} = 0,2 \text{ м}$), остаточно матимемо

$$\boxed{x = 0,2 \sin 4t - 0,8 t \cos 4t \text{ м}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
soln = DSolve[x''[t] + k^2 x[t] == 0, x[t], t]
 {{x[t]→C[1] Cos[k t]+C[2] Sin[k t]}}
```

x1=x[t]/.soln[[1]]

C[1] Cos[k t]+C[2] Sin[k t]

x2=U t Sin[ω t]+W t Cos[ω t]

t W Cos[t ω]+t U Sin[t ω]

α=D[x2,t]

W Cos[t ω]+t U ω Cos[t ω]+U Sin[t ω]-t W ω Sin[t ω]

β=D[x2,{t,2}]

$$2\,U\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-t\,W\,\omega^2\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-2\,W\,\omega\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]-t\,U\,\omega^2\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]$$

γ = β + k² x2

$$2\,U\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-t\,W\,\omega^2\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-2\,W\,\omega\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]-t\,U\,\omega^2\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]+k^2\,(t\,W\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+t\,U\,\mathrm{Sin}[t\,\omega])$$

Coefficient[γ,Sin[ω t]]

$$k^2\,t\,U-2\,W\,\omega-t\,U\,\omega^2$$

Coefficient[γ,Cos[ω t]]

$$k^2\,t\,W+2\,U\,\omega-t\,W\,\omega^2$$

**Solve[{Coefficient[γ,Sin[ω t]]==a,Coefficient[γ,Cos[ω]]==0},
{U,W}]**

$$\left\{\left\{U\to-\frac{a\,(k^2\,t-t\,\omega^2)}{-4\,\omega^2-(k^2\,t-t\,\omega^2)^2},\ W\to\frac{2\,a\,\omega}{-4\,\omega^2-(k^2\,t-t\,\omega^2)^2}\right\}\right\}$$

%/.k→ω

$$\left\{\left\{U\to 0,\ W\to-\frac{a}{2\,\omega}\right\}\right\}$$

qs=%[[1]]

$$\left\{U\to 0,\ W\to-\frac{a}{2\,\omega}\right\}$$

x2=x2/.qs

$$-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}$$

x=x1+x2

$$C[1]\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+C[2]\,\mathrm{Sin}[k\,t]$$

xdot=D[x,t]

$$k\,C[2]\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}-k\,C[1]\,\mathrm{Sin}[k\,t]+\frac{1}{2}\,a\,t\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]$$

xnul=x/.t→0;xdotnul=xdot/.t→0

$$-\frac{a}{2\,\omega}+k\,C[2]$$

Solve[{xnul==x0,xdotnul==xdot0},{C[1],C[2]}]

$$\left\{\left\{C[1]\to x0,\ C[2]\to\frac{a+2\,xdot0\,\omega}{2\,k\,\omega}\right\}\right\}$$

qs2=x/.%[[1]]

$$x0\,\mathrm{Cos}[k\,t]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+\frac{(a+2\,xdot0\,\omega)\,\mathrm{Sin}[k\,t]}{2\,k\,\omega}$$

%/.k→ω

$$x0\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]-\frac{a\,t\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{2\,\omega}+\frac{(a+2\,xdot0\,\omega)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{2\,\omega^2}$$

m=24.5;c=392;H=156.8;x0=0;xdot0=0;

%%/.{a→H/m,ω→4.}

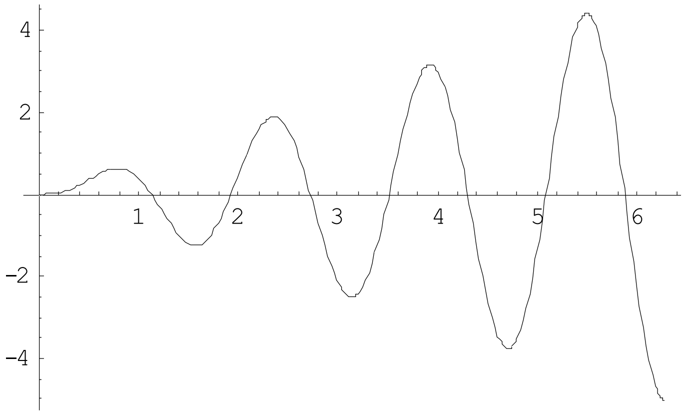
```
-0.8 t Cos[4. t]+0.2 Sin[4. t]
qs3=FullSimplify[%]//Chop
-0.8 t Cos[4. t]+0.2 Sin[4. t]
```

$$\text{PeriodFree} = \frac{2\pi}{k} \ /.\ k \to \sqrt{c/m}$$

```
1.5708
```

$$\text{PeriodForced} = \frac{2\pi}{\omega} \ /.\ \omega \to 4.$$

```
1.5708
Plot[Evaluate[qs3],{t,0,4PeriodForced},PlotPoints→200]
```




```
-Graphics-
```

3.3. Явище биття

32.92. Тягар маси 24,5 кг висить на пружині жорсткості 392 Н/м. Визначити рух тягаря, якщо на нього починає діяти сила $F(t) = 39{,}2\cos 6t$ Н.

Відповідь: $x = 16\sin t \sin 5t$ см. Коливання мають характер *биття*.

Дано: $m = 24{,}5$ кг, $c = 392$ Н/м; $F(t) = 39{,}2\cos 6t$ Н; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1 задачі **32.81**):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{п}} + \vec{F},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що

$$F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right), \text{ а } \Delta_c = \frac{mg}{c},$$

отримаємо

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} + F.$$

Крім цього $F = F_0 \cos\omega t$, де $F_0 = 39{,}2$ Н, а $\omega = 6$ рад/с. Тоді, поділивши на масу m, матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = f_0 \sin\omega t, \tag{1}$$

де $f_0 = F_0 / m = \dfrac{39{,}2\ \text{Н}}{24{,}5\ \text{кг}} = 1{,}6\ \text{м/с}^2$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{392\ \text{Н/см}}{24{,}5\ \text{кг}}} = 4$ рад/с.

Загальний розв'язок $x(t)$ неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \tag{2}$$

і частинного розв'язку x_2 вихідного рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (чисто уявні, спряжені), для яких x_1 матиме вигляд

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Частинний розв’язок x_2 будемо шукати у вигляді

$$x_2 = W\cos\omega t, \tag{4}$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -W\omega^2\cos\omega t. \tag{5}$$

Якщо підставити вирази (4) і (5) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-W\omega^2\cos\omega t + k^2 W\cos\omega t = f_0\cos\omega t,$$

звідки неважко знайти, що $W\left(k^2 - \omega^2\right) = f_0$, а

$$W = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} = \frac{1{,}6\ \text{м/с}^2}{16\ \text{рад}^2/\text{с}^2 - 36\ \text{рад}^2/\text{с}^2} = -0{,}08\ \text{м} = -8\ \text{см}.$$

Отже маємо $x_2 = W\cos\omega t = -8\ \cos 6t$ см.

Таким чином для $x(t)$ маємо наступний вираз:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + W\cos\omega t. \tag{6}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (6) за часом

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt - W\omega\sin\omega t. \tag{7}$$

Підставляючи далі у вирази (6) і (7) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + W = 0, \\ \dot{x}(0) = C_2 k = 0. \end{cases} \tag{8}$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = -W,\ C_2 = 0.$$

Тоді отримаємо наступний вираз для $x(t)$:

$$x(t) = W\left(\cos\omega t - \cos kt\right) = -2W\sin\left(\frac{\omega + k}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega - k}{2}t\right) =$$

$$= -2\left(-8\ \text{см}\right)\sin 5t\cdot\sin t = 16\sin t\sin 5t\ \text{см}.$$

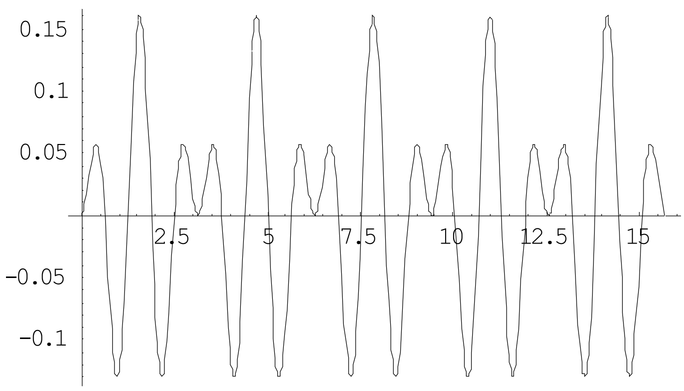
Отже остаточно маємо

$$\boxed{x(t) = 16\sin t\sin 5t\ \text{см}}.$$

Ці коливання мають характер *биття*.

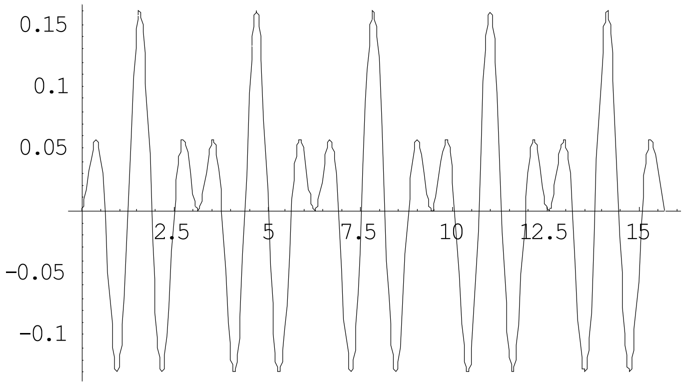
Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
m=24.5;c=392;A=39.2;
 soln = DSolve[{x''[t] + k^2 x[t] == a Cos[ω t], x'[0] == xdot0, x[0] == x0},
   x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0; x0=0;
 %%/. {k→ √(c/m), a→ A/m, ω→ 6}
 -0.00625 (-12.8 Cos[4. t]+16. Cos[2. t] Cos[4. t]-3.2 Cos[4.
t] Cos[10. t]-16. Sin[2. t] Sin[4. t]-3.2 Sin[4. t] Sin[10.
t])
 x=TrigExpand[%]//FullSimplify//Chop
 0.08 Cos[4. t]-0.08 Cos[6. t]
 PeriodFree = 2π/k /. k→ √(c/m)
 1.5708
 PeriodForced = 2π/ω /. ω→ 6
 π/3
 Plot[Evaluate[x],{t,0,10 PeriodFree}]
```




```
-Graphics-
```

```
Plot[Evaluate[0.16 Sin[t] Sin[5 t]],{t,0, 10 PeriodFree}]
```




```
-Graphics-
```

3.4. Подвійний резонанс

32.93. Тягар на пружині коливається таким чином, що його рух описується диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x}+cx=5\cos\omega t+2\cos 3\omega t .$$

Знайти закон руху тягаря, якщо у початковий момент його зміщення і швидкість дорівнювали нулю, а також визначити, за яких значень ω настає резонанс.

Відповідь:

$$x=\frac{47m\omega^2-7c}{\left(c-m\omega^2\right)\left(c-9m\omega^2\right)}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{5}{c-m\omega^2}\cos\omega t+\frac{2}{c-9m\omega^2}\cos 3\omega t .$$

Резонанс настане у двох випадках: $\omega_{1\text{кр}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}$ та $\omega_{2\text{кр}}=\sqrt{\frac{c}{m}}$.

Дано: диференціальне рівняння руху $m\ddot{x}+cx=5\cos\omega t+2\cos 3\omega t$, $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

Знайти: $x(t)$, $\omega_{1\text{кр}}$, $\omega_{2\text{кр}}$.

Р о з в' я з а н н я

Поділивши вихідне рівняння на масу m, отримаємо таке рівняння:

$$\ddot{x} + k^2 x = a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 3\omega t, \tag{1}$$

де $a_1 = 5/m$ Н, $a_2 = 2/m$ Н; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Загальний розв'язок $x(t)$ неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \tag{2}$$

і частинного розв'язку x_2 рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (чисто уявні, спряжені), для яких x_1 матиме вигляд

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Частинний розв'язок x_2 будемо шукати у вигляді

$$x_2 = W_1 \cos\omega t + W_2 \cos 3\omega t, \tag{4}$$

друга похідна за часом від якого набуває форми:

$$\ddot{x}_2 = -W_1\omega^2 \cos\omega t - W_2\omega^2 \cos 3\omega t. \tag{5}$$

Якщо підставити вирази (4) і (5) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-W_1\omega^2 \cos\omega t - W_2\omega^2 \cos 3\omega t + k^2\left(W_1 \cos\omega t + W_2 \cos 3\omega t\right) = a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 3\omega t,$$

Прирівнюючи у цьому виразі коефіцієнти біля $\cos\omega t$ і $\cos 3\omega t$ зправа і зліва, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення W_1 і W_2:

$$\begin{cases} \left(k^2-\omega^2\right)W_1 = a_1, \\ \left(k^2-9\omega^2\right)W_2 = a_2, \end{cases}$$

звідки отримаємо: $W_1 = \dfrac{a_1}{k^2-\omega^2}$, $W_2 = \dfrac{a_2}{k^2-9\omega^2}$.

Таким чином для $x(t)$ маємо наступний вираз:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + W_1\cos\omega t + W_2\cos 3\omega t. \tag{6}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо похідну від виразу (6) за часом

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt - W_1\omega\sin\omega t - 3W_2\omega\cos 3\omega t. \tag{7}$$

Підставляючи далі у вирази (6) і (7) початкові умови, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + W_1 + W_2 = 0, \\ \quad \dot{x}(0) = C_2 k = 0, \end{cases} \tag{8}$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = -W_1 - W_2 = \frac{-a_1}{k^2-\omega^2} + \frac{-a_2}{k^2-9\omega^2} = \frac{-\left(a_1+a_2\right)k^2 + 9\omega^2 a_1 + \omega^2 a_2}{\left(k^2-\omega^2\right)\left(k^2-9\omega^2\right)},\quad C_2 = 0.$$

Вираз для C_1 можна спростити, якщо згадати вирази для a_1, a_2 і k:

$$C_1 = \frac{-7c + 45m\omega^2 + 2m\omega^2}{\left(c-m\omega^2\right)\left(c-9m\omega^2\right)} = \frac{47m\omega^2 - 7c}{\left(c-m\omega^2\right)\left(c-9m\omega^2\right)}.$$

Тоді отримаємо наступний остаточний вираз для $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = \frac{47m\omega^2 - 7c}{\left(c-m\omega^2\right)\left(c-9m\omega^2\right)}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{5}{c-m\omega^2}\cos\omega t + \frac{2}{c-9m\omega^2}\cos 3\omega t}.$$

Зауважимо, що знаменники в отриманому виразі для $x(t)$ обертаються в нуль (тобто матиме місце явище *резонансу*), коли

$$\omega = \omega_{1\text{кр}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}} \text{ або } \omega = \omega_{2\text{кр}} = \sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

Таким чином, у даній коливальній системі резонанс може статися при співпаданні частоти ω збурюючої сили із вказаними частотами $\omega_{1\text{кр}}$ і $\omega_{2\text{кр}}$; він отримав назву *подвійного резонансу*.

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

```
soln=DSolve[{m x''[t]+c x[t]==5 Cos[ω t]+2 Cos[3 ω t],
             x'[0]==0,x[0]==0},x[t],t];
 x[t]/.soln[[1]];
 x=TrigExpand[%]//FullSimplify//Chop
```

$$\left((-7\,c+47\,m\,\omega^2)\,\text{Cos}\left[\frac{\sqrt{c}\,t}{\sqrt{m}}\right]+5\,(c-9\,m\,\omega^2)\,\text{Cos}[t\,\omega]+2\,(c-m\,\omega^2)\,\text{Cos}[3\,t\,\omega]\right)\Big/\left((c-9\,m\,\omega^2)\,(c-m\,\omega^2)\right)$$

$$\textbf{Coefficient}\left[\%,\,\textbf{Cos}\left[\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}\,t\right]\right]$$

$$\frac{-7\,c+47\,m\,\omega^2}{(c-9\,m\,\omega^2)\,(c-m\,\omega^2)}$$

```
 Coefficient[%%,Cos[t ω]]
```

$$\frac{5}{c-m\,\omega^2}$$

```
 Coefficient[%%%,Cos[3 t ω]]
```

$$\frac{2}{c-9\,m\,\omega^2}$$

$$\textbf{soln1} = \textbf{Solve}\left[(c-9\,m\,\omega^2)\,(c-m\,\omega^2) == 0,\,\omega\right]$$

$$\left\{\left\{\omega\to-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}\right\},\ \left\{\omega\to-\frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{m}}\right\},\ \left\{\omega\to\frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{m}}\right\},\ \left\{\omega\to\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}\right\}\right\}$$

$$\omega_{1\text{кр}} = \textbf{soln1}[[3]]$$

$$\left\{\omega\to\frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{m}}\right\}$$

$$\omega_{2\text{кр}} = \textbf{soln1}[[4]]$$

$$\left\{\omega\to\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}\right\}$$

3.5. Коливання матеріальної точки за наявності сил опору

32.94. На пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 19,6$ Н/м, підвішені магнітний стрижень маси 50 г, що проходить через соленоїд, і мідна пластинка маси 50 г, що проходить між полюсами магніта. По соленоїду тече струм $i = 20\sin 8\pi t$ А, який розвиває сили взаємодії із магнітним стрижнем $0,016\pi i$ Н (рис. 1). Сила гальмування мідної пластинки внаслідок вихрових струмів дорівнює $k\mathrm{v}\Phi^2$ Н, де $k = 0,001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб і v - швидкість пластинки у м/с. Визначити змушені коливання пластинки.

Відповідь: $x_2 = 0,022\sin\left(8\pi t - 0,91\pi\right)$ м.

Дано: $m = 0,1$ кг, $c = 19,6$ Н/м; $i = 20\sin 8\pi t$ А, $F = 0,016\pi i$ Н; $R = k\mathrm{v}\Phi^2$ Н, $k = 0,001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x_2(t)$.

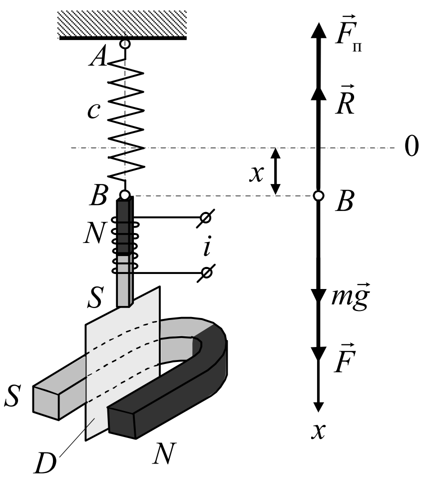


Рис. 1. Пластинка на пружині у магнітному полі під дією збурюючої сили.

Р о з в' я з а н н я

За другим законом Ньютона маємо (див. діаграму сил на рис. 1):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{п}} + \vec{R} + \vec{F},$$

або в проекції на вісь x, беручи до уваги, що $F_{\text{п}} = c\left(x + \Delta_c\right)$, а $F = F_0 \sin \omega t$ ($F_0 = 0{,}016\pi \cdot 20\ \text{Н} = 0{,}32\pi\ \text{Н}$; $\omega = 8\pi$ рад/с), -

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \Delta_c) - h\dot{x} + F_0 \sin \omega t,$$

де $h = k\Phi^2 = 0{,}001 \cdot 500\ \text{Вб}^2 = 0{,}5$ кг/с, і потім

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - cx - \cancel{c\Delta_c} - h\dot{x} + F_0 \sin \omega t, \text{ або } m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = F_0 \sin \omega t.$$

Поділивши останнє рівняння на масу m, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

де

$$2\varsigma = \frac{h}{m} = \frac{0{,}5\ \text{кг/с}}{0{,}1\ \text{кг}} = 5\ \text{рад/с},\ k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}1\ \text{кг}}} = 14\ \text{рад/с},$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = 3{,}2\pi\ \text{м/с}^2.$$

Частинний розв'язок x_2 рівняння (1), який описує змушені коливання матеріальної точки B (в ній вважаються зконцентрованими маси магнітного стрижня і мідної пластинки), знайдемо наступним чином.

Оскільки права частина рівняння (1) є гармонійною функцією, то будемо шукати x_2 у вигляді

$$x_2 = U \sin \omega t + W \cos \omega t, \tag{2}$$

перша і друга похідна за часом від якого набувають форми:

$$\dot{x}_2 = U\omega \cos \omega t - W\omega \sin \omega t,\ \ddot{x}_2 = -U\omega^2 \sin \omega t - W\omega^2 \cos \omega t. \tag{3}$$

Якщо підставити вирази (2) і (3) у вихідне рівняння (1), то отримаємо

$$-U\omega^2\sin\omega t - W\omega^2\cos\omega t + 2\varsigma\left(U\omega\cos\omega t - W\omega\sin\omega t\right) +$$
$$+k^2\left(U\sin\omega t + W\cos\omega t\right) = f_0\sin\omega t.$$

Прирівнюючи у цьому виразі коефіцієнти біля $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$ зправа і зліва, отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення U і W:

$$\begin{cases}\left(k^2-\omega^2\right)U - 2\varsigma\omega W = f_0,\\ 2\varsigma\omega U + \left(k^2-\omega^2\right)W = 0.\end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння за методом Крамера.

Головний визначник Δ системи та визначники Δ_U, Δ_W змінних U і W відповідно дорівнюють:

$$\Delta = \left(k^2-\omega^2\right)^2 + 4\varsigma^2\omega^2,\ \ \Delta_U = f_0\left(k^2-\omega^2\right),\ \ \Delta_W = -2\varsigma\omega f_0.$$

Тоді коефіцієнти U і W дорівнюватимуть

$$U = \frac{\Delta_U}{\Delta} = \frac{f_0\left(k^2-\omega^2\right)}{\left(k^2-\omega^2\right)^2+4\varsigma^2\omega^2} = \frac{3{,}2\pi\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\left(14^2\ \frac{\text{рад}^2}{c^2} - 64\pi^2\ \frac{\text{рад}^2}{c^2}\right)}{\left(14^2\frac{\text{рад}^2}{c^2} - 64\pi^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}\right)^2 + 4\cdot 2{,}5^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}\cdot 64\pi^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}} =$$
$$= -0{,}0211\ \text{м};$$

$$W = \frac{\Delta_W}{\Delta} = \frac{-2\varsigma\omega f_0}{\left(k^2-\omega^2\right)^2+4\varsigma^2\omega^2} = \frac{-2\cdot 2{,}5\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\cdot 8\pi\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\cdot 3{,}2\pi\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\left(14^2\frac{\text{рад}^2}{c^2} - 64\pi^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}\right)^2 + 4\cdot 2{,}5^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}\cdot 64\pi^2\frac{\text{рад}^2}{c^2}} =$$
$$= -0{,}0061\ \text{м}.$$

Таким чином для x_2 маємо наступний вираз:

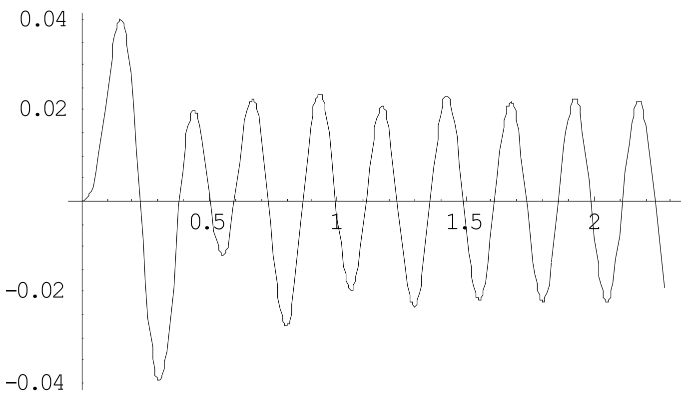
$$\boxed{x_2(t) = -0{,}0211\sin 8\pi t - 0{,}0061\cos 8\pi t = 0{,}022\sin\left(8\pi t - 0{,}91\pi\right)\ \text{м}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

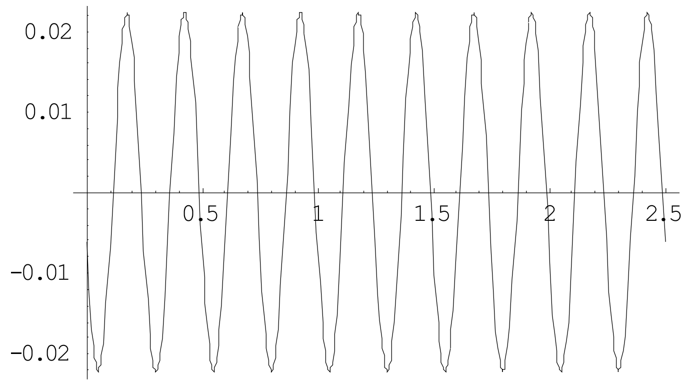
```
m = 0.1; c = 19.6; A = 20; K = 0.016; K1 = 0.001; Φ = 10 √5 ;

soln = DSolve[{x''[t] + 2 ξ x'[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == xdot0, x[0] == x0},
   x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0;x0=0;
 %%/. {ξ → K1 Φ^2 / (2 m), k → √(c/m), a → K π A / m, ω → 8 π}
 (1.40395×10^-24 + 1.76557×10^-7 ⅈ)
  ((113232. - 17402.1 ⅈ) ⅇ^((-2.5-13.775 ⅈ) t) - (113232. + 17402.1 ⅈ) ⅇ^((-2.5+13.775 ⅈ) t) +
    (0. + 34804.1 ⅈ) Cos[8 π t] + (0. + 120660. ⅈ) Sin[8 π t])
 x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop

-0.00614491 Cos[8 π t] +
 ⅇ^(-2.5 t) (0.00614491 Cos[13.775 t] + 0.0399837 Sin[13.775 t]) - 0.0213034 Sin[8 π t]
 PeriodFree = 2 π / √(k^2 - ξ^2) /. {ξ → K1 Φ^2 / (2 m), k → √(c/m)}
 0.45613
 Plot[Evaluate[x],{t,0,5 PeriodFree}]
```




```
 -Graphics-
 U=Coefficient[x, Sin[ω t]/.ω→8 π];
 W=Coefficient[x, Cos[ω t]/.ω→8 π];
 x2 = √(U^2 + W^2) Sin[8 π t + ArcTan[U, W]]
 -0.0221719 Sin[2.86077 -8 π t]
 PeriodForced = 2 π / ω /. {ω → 8 π}
 1/4
 Plot[Evaluate[x2],{t,0,10 PeriodForced}]
```



-Graphics-

32.95. За умови попередньої задачі знайти рівняння руху пластинки, якщо її підвісили разом із магнітним стрижнем до кінця нерозтягнутої пружини і надали їм початкову швидкість 5 см/с, напрямлену вниз.

Відповідь:

$x = e^{-2,5t}\left(-4,39\cos 13,77t + 3,42\sin 13,77t\right) + 2,2\sin\left(8\pi t - 0,91\pi\right)$, см.

Дано: $m = 0{,}1$ кг, $c = 19{,}6$ Н/м; $i = 20\sin 8\pi t$ А, $F = 0{,}016\pi i$ Н; $R = k\text{v}\Phi^2$ Н, $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб; $x(0) = x_0 = -\Delta_c = -5$ см, $\dot{x}(0) = \text{v}_0 = 5$ см/с.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в' я з а н н я

Скористаємося рівнянням (1), отриманим у попередній задачі **32.94**:

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = f_0 \sin\omega t, \tag{1}$$

де

$$2\varsigma = \frac{h}{m} = \frac{0{,}5\ \text{кг/с}}{0{,}1\ \text{кг}} = 5\ \text{рад/с},\quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}1\ \text{кг}}} = 14\ \text{рад/с},$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = 3{,}2\pi\ \text{м/с}^2.$$

Загальний розв’язок $x(t)$ цього неоднорідного рівняння (1), який описує змушені коливання матеріальної точки B (в ній вважаються зконцентрованими маси магнітного стрижня і мідної пластинки), шукаємо у вигляді суми загального розв’язку x_1 відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_1 + 2\varsigma\dot{x}_1 + k^2 x_1 = 0, \tag{2}$$

і частинного розв’язку x_2 вихідного рівняння (1), тобто у вигляді $x = x_1 + x_2$.

Знайдемо спочатку x_1. Для цього складемо характеристичне рівняння для рівняння (2):

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0,$$

і знайдемо його корені $\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}$.

Оскільки $\varsigma < k$, то маємо

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm i\sqrt{k^2 - \varsigma^2} = -\varsigma \pm ik_*,$$

де $k_* = \sqrt{k^2 - \varsigma^2} = \sqrt{196\ \text{рад}^2/\text{с}^2 - 6{,}25\ \text{рад}^2/\text{с}^2} = 13{,}77\ \text{рад/с}$.

Тоді x_1 треба шукати у вигляді

$$x_1 = e^{-\varsigma t}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right). \tag{3}$$

Частинний розв’язок x_2 рівняння (1) отриманий при розв'язанні задачі **32.94** має вигляд ($U = -2{,}11\ \text{см}$, $W = -0{,}61\ \text{см}$)

$$\begin{aligned} x_2 &= U\sin\omega t + W\cos\omega t = \\ &= -2{,}11\sin 8\pi t - 0{,}61\cos 8\pi t = 2{,}2\sin\left(8\pi t - 0{,}91\pi\right),\ \text{см}. \end{aligned} \tag{4}$$

Отже, $x(t)$ набуває вигляду

$$x = e^{-\varsigma t}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right) + U\sin\omega t + W\cos\omega t. \tag{5}$$

Знаходимо його першу похідну за часом

$$\dot{x} = -\varsigma e^{-\varsigma t}\left(C_1\cos k_* t + C_2\sin k_* t\right) + e^{-\varsigma t}\left(-C_1 k_*\sin k_* t + C_2 k_*\cos k_* t\right) + \quad (6)$$
$$+ U\omega\cos\omega t - W\omega\sin\omega t.$$

Якщо підставити в останні два вирази (5) і (6) початкові умови, то отримаємо наступну систему алгебричних рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + W = x_0, \\ \dot{x}(0) = -\varsigma C_1 + k_* C_2 + U\omega = \mathrm{v}_0, \end{cases} \quad (7)$$

розв'язуючи яку відносно C_1 і C_2 матимемо

$$C_1 = x_0 - W = -5\text{ см} + 0{,}61\text{ см} = -4{,}39\text{ см};$$

$$C_2 = \frac{1}{k_*}\left(\mathrm{v}_0 + \varsigma C_1 - U\omega\right) =$$
$$= \frac{1}{13{,}77\text{ рад/с}}\left(5\text{ см/с} - 2{,}5\text{ рад/с}\cdot 4{,}39\text{ см} + 2{,}11\text{ см}\cdot 8\pi\text{ рад/с}\right) = 3{,}42\text{ см}.$$

Тоді отримаємо наступний остаточний вираз для $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = e^{-2{,}5t}\left(-4{,}39\cos 13{,}77t + 3{,}42\sin 13{,}77t\right) + 2{,}2\sin\left(8\pi t - 0{,}91\pi\right)\text{ см}}.$$

Роздруковка програми розв'язання цієї задачі з використанням пакету Mathematica наведена нижче.

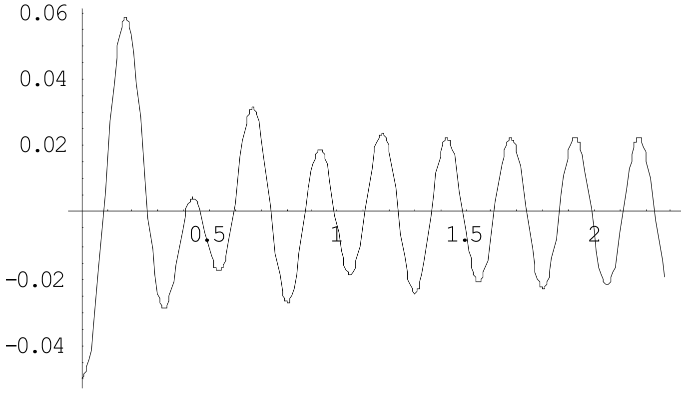
```
m = 0.1; c = 19.6; A = 20; K = 0.016; K1 = 0.001; Φ = 10 √5 ;

soln = DSolve[{x''[t] + 2 ξ x'[t] + k^2 x[t] == a Sin[ω t], x'[0] == xdot0, x[0] == x0},
   x[t], t];
 x[t]/.soln[[1]];
 xdot0=0.05; x0=-0.05;
 %%/. {ξ → K1 Φ^2 / (2 m), k → √(c/m), a → K π A / m, ω → 8 π}
 (1.40395×10^-24 + 1.76557×10^-7 ⅈ)
  ((97812.6 + 124195. ⅈ) ⅇ^((-2.5-13.775 ⅈ) t) - (97812.6 - 124195. ⅈ) ⅇ^((-2.5+13.775 ⅈ) t) +
    (0. + 34804.1 ⅈ) Cos[8 π t] + (0. + 120660. ⅈ) Sin[8 π t])
 x=ComplexExpand[%]//FullSimplify//Chop

-0.00614491 Cos[8 π t] +
 ⅇ^(-2.5 t) (-0.0438551 Cos[13.775 t] + 0.034539 Sin[13.775 t]) - 0.0213034 Sin[8 π t]
 PeriodFree = 2 π / √(k^2 - ξ^2) /. {ξ → K1 Φ^2 / (2 m), k → √(c/m)}
```

0.45613

```
Plot[Evaluate[x],{t,0,5PeriodFree},PlotPoints→100,PlotRange→All]
```



-Graphics-

```
U=Coefficient[x, Sin[ω t]/.ω→8 π];
W=Coefficient[x, Cos[ω t]/.ω→8 π];
```

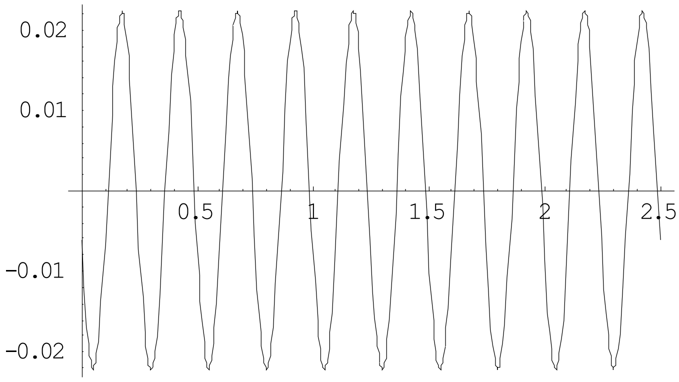
x2 = $\sqrt{U^2 + W^2}$ Sin[8 π t + ArcTan[U, W]]

-0.0221719 Sin[2.86077 -8 π t]

PeriodForced = $\frac{2\pi}{\omega}$ /. {ω → 8 π}

$\frac{1}{4}$

```
Plot[Evaluate[x2],{t,0,10 PeriodForced}]
```



-Graphics-

ДОДАТОК

Алгоритм розв'язання звичайного неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Назване рівняння має вигляд

$$\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = a(t). \quad (1)$$

Розв'яжемо його за наступних початкових умов: при $t = 0 \quad x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

1. Записати характеристичне рівняння для відповідного (1) однорідного рівняння ($\ddot{x} + 2\varsigma\dot{x} + k^2 x = 0$) у вигляді[2]

$$\lambda^2 + 2\varsigma\lambda + k^2 = 0. \quad (2)$$

2. Знайти корені характеристичного рівняння (2)

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm \sqrt{\varsigma^2 - k^2}. \quad (3)$$

В залежності від величини параметрів ς і k можливі наступні чотири окремих випадка:

а) корені λ_1 і λ_2 дійсні різні, коли $\varsigma > k$:

$$\lambda_1 = -\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - k^2}, \ \lambda_2 = -\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - k^2};$$

б) корені λ_1 і λ_2 дійсні рівні при $\varsigma = k$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\varsigma;$$

в) корені λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені при $\varsigma < k$:

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma \pm i\sqrt{k^2 - \varsigma^2} = -\varsigma \pm ik_*,$$

---

[2] Характеристичне рівняння отримується із диференціального шляхом наступних замін: $\ddot{x} \to \lambda^2, \ \dot{x} \to \lambda, \ x \to 1$.

де $k_*^2 = k^2 - \varsigma^2$;

г) корені λ_1 і λ_2 чисто уявні при $\varsigma = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm ik .$$

3. Скласти, виходячи із знайдених в п. 2 коренів, загальний розв’язок x_1 однорідного рівняння, який відповідає вказаним вище окремим випадкам:

   а) $x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\varsigma t}\left(C_1 e^{\sqrt{\varsigma^2 - k^2}} + C_2 e^{-\sqrt{\varsigma^2 - k^2}}\right)$;

   б) $x_1 = e^{-\varsigma t}(C_1 + C_2 t)$;

   в) $x_1 = e^{-\varsigma t}(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t)$;

   г) $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$.

4. Частинний розв’язок x_2 вихідного неоднорідного рівняння (1) слід шукати у вигляді, що відповідає правій частині $a(t)$:

- якщо $a(t) = \mathrm{const}$, то у вигляді сталої U, тобто $x_2 = U$;
- якщо $a(t) = \rho e^{\alpha t}$, то $x_2 = U e^{\alpha t}$;
- якщо $a(t) = \sigma \sin(\omega t + \beta)$ або $a(t) = \sigma \cos(\omega t + \beta)$ (і при цьому $\omega \neq k$, $\varsigma \neq 0$), то у вигляді

$$x_2 = U \sin(\omega t + \beta) + W \cos(\omega t + \beta);$$

якщо ж $\varsigma = 0$, то

для $a(t) = \sigma \sin(\omega t + \beta)$ слід взяти $x_2 = U \sin(\omega t + \beta)$,

а для $a(t) = \sigma \cos(\omega t + \beta) \quad \rightarrow \quad x_2 = W \cos(\omega t + \beta)$;

якщо $\omega = k$ разом з $\varsigma = 0$ (випадок *резонансу*), то у вигляді

$$x_2 = t\left[U \sin(\omega t + \beta) + W \cos(\omega t + \beta)\right].$$

<u>Примітка</u>: *якщо права частина являє собою суму вказаних вище функцій $a(t)$, то і загальний шуканий частинний розв'язок треба шукати у вигляді суми відповідних кожній функції $a(t)$ частинних розв'язків x_2.*

5. Підставити вираз x_2 у вихідне рівняння (взявши необхідні похідні) і, прирівнявши коефіцієнти при однакових функціях зліва і зправа від знаку рівності, знайти шукані коефіцієнти A, B, и т. д.
6. Отримані вище x_1 і x_2 об'єднати в загальний розв'язок вихідного рівняння $x = x_1 + x_2$.
7. Знайти $\dot{x}$ (першу похідну від x за часом).
8. Підставити у знайдені вирази для x і $\dot{x}$ значення $t = 0$ і знайти із отриманих виразів сталі інтегрування C_1 і C_2, використовуючи початкові умови.
9. Записати і проаналізувати отриманий вираз $x(t)$.
10. Знайти шукані величини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Використана література

1. *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1980. – 446 с.
2. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – М.: Наука, 1971-1973. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.

Рекомендована література

3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: ГИ ФМЛ, 1959. – 916 с.
4. *Апостолюк А. С., Ларин В. Б.* Об оптимальных характеристиках систем виброзащиты. - В кн."Механика гироскопических систем". Респ. межвед. сб., вып. 1, - К.: изд-во при КГУ изд. объединения "Вища школа", 1982, С. 17-21.
5. *Апостолюк А. С., Ларин В. Б.* Предельные возможности виброзащиты. - В кн.: "Влияние вибрации на организм человека и проблемы виброзащиты. Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума" (г. Москва, янв. 1983 г.). - М.: Наука, 1982, С. 61.
6. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – М.: Гостехиздат, 1958. – 628 с.
7. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. Пер. с англ. под ред. И. Н. Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 503 с.
9. *Булгаков Б. В.* Колебания. – М.: ГИ ТТЛ, 1954. – 892 с.
10. *Вейц В. Л., Коловский М. З., Кочура А. Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
11. *Вульфсон Н. Н., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
12. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
13. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.
14. *Карпушин В. Б.* Вибрации и удары в радиоаппаратуре. – М.: Сов. радио, 1971. – 344 с.
15. *Кононенко В. О., Павловский М. А.* О погрешностях амортизированных гироприборов, вызванных пространственными колебаниями // Изв. АН СССР, МТТ. – 1977. - № 4. – С. 9-19.

16. *Конторович М. И.* Нелинейные колебания в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1973. – 320 с.
17. *Ларин В. Б.* Статистические задачи виброзащиты. – К.: Наук. думка, 1974. – 128 с.
18. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ по курсу теоретической механики с использованием ЭВМ. Раздел "Теория колебаний" для студентов всех специальностей / Сост. *А. С. Апостолюк, В. Н. Шелудько, С. Я. Свистунов.* – К.: КПИ, 1987. - 24 с.
19. *Мэнли Р.* Анализ и обработка записей колебаний. Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1972. – 368 с.
20. *Новожилов И. В., Зацепин М. Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986. – 134 с.
21. *Павловский М. А., Рыжков Л. М., Яковенко В. Б., Дусматов О. М.* Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. – К.: Техніка, 1997. – 204 с.
22. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 239 с.
23. *Путята Т. В., Фрадлін Б. Н.* Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Рад. шк., 1955. – 368 с.
24. *Светлицкий В. А.* Случайные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
25. *Светлицкий В. А., Стасенко И. В.* Сборник задач по теории колебаний. Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1973. – 454 с.
26. Случайные колебания. Под ред. *С. Кренделла.* (Пер. с англ. под ред. А. А. Первозванского). – М.: Мир, 1967. – 356 с.
27. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
28. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
29. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
30. *Яблонский А. А., Норейко С. С.* Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1966. – 255 с.
31. *V. B. Larin, A. S. Apostolyuk.* Estimation of maximum possibilities of protection from random vibration. - In: Proceedings of the Second International CISM-IFToMM Symposium "Man under vibration", Moscow, USSR, April 8-12, 1985, pp. 270-275.