

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

На правах рукопису

АПОСТОЛЮК ВЛАДИСЛАВ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

**УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ
КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ**

05.11.03 "Гіроскопи та навігаційні системи"

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Науковий консультант
Збруцький Олександр Васильович
доктор технічних наук, професор

Київ – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 КОНСТРУКЦІЇ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ	13
1.1 Принцип роботи коріолісових вібраційних гіроскопів.....	13
1.2 Класифікація коріолісових вібраційних гіроскопів.....	16
1.3 Конструкції чутливих елементів	18
1.4 Огляд публікацій по теорії коріолісових вібраційних гіроскопів.....	33
1.5 Висновки	36
РОЗДІЛ 2 РІВНЯННЯ РУХУ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ	38
2.1 Рівняння чутливого елемента з поступальним рухом.....	38
2.2 Рівняння руху обертального чутливого елемента	44
2.3 Рівняння руху камертонного чутливого елемента.....	50
2.4 Рівняння руху кільцевого чутливого елемента.....	54
2.5 Узагальнені рівняння руху	55
2.6 Висновки	58
РОЗДІЛ 3 ДИНАМІКА ЧУТЛИВОГО ЕЛЕМЕНТУ	59
3.1 Первинний рух чутливого елемента	59
3.2 Рух чутливого елемента на основі, що обертається.....	62
3.3 Моделювання фазової траєкторії руху інерційної маси	71
3.4 Числове моделювання динаміки КВГ	79
3.5 Висновки	82
РОЗДІЛ 4 ДИНАМІКА КВГ В ДЕМОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛАХ.....	84
4.1 Рівняння руху в демодульованих сигналах	84
4.2 Передатні функції коріолісових вібраційних гіроскопів	88
4.3 Амплітудні і фазові відгуки	91

4.4 Стійкість і оптимізація перехідного процесу	92
4.5 Спрощена передатна функція та її точність	97
4.6 Передатна функція обертання траєкторії	100
4.7 Висновки	104

РОЗДІЛ 5 МЕТОДОЛОГІЇ КОНСТРУЮВАННЯ ЧУТЛИВИХ

ЕЛЕМЕНТІВ	106
5.1 Оптимальне збудження первинних коливань	106
5.2 Масштабний коефіцієнт та його нелінійність	121
5.3 Роздільна здатність і динамічний діапазон	129
5.4 Зсув нуля	133
5.5 Динамічна похибка і смуга пропускання.....	137
5.6 Автоматизоване проектування чутливого елемента	144
5.7 Висновки	148

РОЗДІЛ 6 ОБРОБКА СИГНАЛІВ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ

ГІРОСКОПІВ	151
6.1 Шуми та збурення в коріолісових вібраційних гіроскопах	151
6.2 Оптимальна фільтрація шумів вимірювання	155
6.3 Оптимальна фільтрація стохастичних збурень.....	162
6.4 Синтез оптимального фільтра Калмана.....	169
6.5 Експериментальна фільтрація шумів вимірювання	175
6.6 Компенсація перехресних зв'язків	178
6.6 Компенсація перехресних зв'язків по кутовій швидкості	191
6.8 Компенсація температурних похибок.....	205
6.9 Висновки	217

РОЗДІЛ 7 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА КЕРУВАННЯ КОРІОЛІСОВИХ

ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ.....	219
7.1 Моделі динаміки чутливих елементів у просторі станів	219
7.2 Ідентифікація коріолісових вібраційних гіроскопів.....	226
7.3 Керування в режимі інтегруючого гіроскопа.....	232

7.4 Керування в компенсаційному режимі	237
7.5 Висновки	242
ВИСНОВКИ	243
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	246
ДОДАТКИ.....	263

ВСТУП

Розвиток сучасних технологій масового виробництва в галузі створення мікро-електромеханічних систем дозволив розробляти недорогі та мініатюрні датчики кутових швидкостей, які почали витісняти традиційні електромеханічні прилади визначення орієнтації та швидкості обертання у таких галузях, як портативні навігаційні системи, автомобільні системи керування, датчики руху в мобільних та переносних побутових електронних пристроях, елементи систем стабілізації і керування безпілотними літальними апаратами, біомеханічні системи, тощо. Завдяки масовому виробництву та мініатюризації стало можливим значно знизити ціну таких датчиків кутової швидкості одночасно із зниженням їх розмірів. В результаті це призвело до значного збільшення областей використання датчиків кутових швидкостей, де раніше це було неможливо із-за великих розмірів або високої ціни. На даний момент, мініатюрні датчики кутових швидкостей можна знайти не тільки в системах навігації, керування та стабілізації рухомих об'єктів, де вони відіграють роль датчиків первинної інформації, але і в менш традиційних застосуваннях, таких як мобільні телефони, робототехнічні комплекси та біомеханічні системи.

Враховуючи обмеження технологій виробництва та потенціал мініатюризації завдяки простоті конструкції їх чутливих елементів, переважна більшість сучасних мініатюрних датчиків кутової швидкості побудовано на основі різних видів *коріолісових вібраційних гіроскопів* (КВГ), які використовують ефект Коріоліса для вимірювання кутової швидкості обертання. У порівнянні із традиційними електромеханічними датчиками кутових швидкостей, коріолісові вібраційні гіроскопи мають такі переваги, як відносна простота конструкції чутливих елементів і відсутність складних привідних електромоторів. Чутливий елемент здійснює поступальні або обертальні коливання, які забезпечуються за рахунок деформацій відповідних

елементів пружного підвісу і тому не потребує спеціальних елементів, які забезпечують низьке тертя між різними складовими чутливого елемента.

З іншого боку, завдяки мініатюризації не тільки зменшуються розміри і інерційні властивості чутливих елементів, але також стає складніше задовольняти вимогам по точності виготовлення пружних елементів в конструкції чутливих елементів. В результаті більшість сучасних коріолісових вібраційних гіроскопів можна віднести до датчиків низького та середнього класу точності. Значне покращення вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів можливе лише за умов розробки методологій оптимального проектування чутливих елементів та створення відповідних систем обробки сигналів та керування.

Актуальність теми. Аналіз публікацій по теорії та методам проектування коріолісових вібраційних гіроскопів показав, що рух їх чутливих елементів зазвичай вивчається із використанням спрощених математичних моделей, побудованих на основі базових рівнянь руху, в яких відсутні важливі складові прискорення, що не дозволяють, наприклад, вивчати обмежений нелінійністю масштабного коефіцієнта діапазон вимірювання, або вплив змінного у часі характеру кутової швидкості. Існуючі математичні моделі розроблялися та можуть застосовуватися лише до конкретних конструкцій чутливих елементів, не дозволяючи їх узагальнення. Аналіз динаміки чутливих елементів проводиться в термінах їх модульованих первинних та вторинних рухів за умов сталої кутової швидкості, де кутова швидкість виступає в якості невідомого коефіцієнта, а не в якості входу до вимірювальної динамічної системи, що б дозволило застосовувати існуючі методи синтезу систем фільтрації та керування. Системи керування синтезуються за допомогою охоплення чутливих елементів позиційним та швидкісним зворотним зв'язком, коефіцієнти яких обираються емпірично, або за допомогою числового моделювання. Розрахунок та оптимізація вимірювальних характеристик конкретних конструкцій коріолісових вібраційних гіроскопів зазвичай проводиться із

використанням числового моделювання, а також числового розв'язку рівнянь руху чутливих елементів.

З огляду на величезне розповсюдження коріолісових вібраційних гіроскопів в сучасних системах навігації, керування та в якості датчиків руху в пристроях мобільної комунікації, і враховуючи існуючі потреби в покращенні їх вимірювальних характеристик та сучасний стан теорії та методів проектування чутливих елементів, актуальним вважається узагальнення та покращення математичних моделей руху чутливих елементів, і створення на їх основі ефективних методів розрахунку їх основних вимірювальних характеристик, методів розрахунку конструктивних параметрів чутливих елементів на основі бажаних вимірювальних характеристик, методів реалістичного числового моделювання, методів та алгоритмів компенсації похибок вимірювання кутової швидкості. Крім цього, існує необхідність в створенні методів вибору конструктивних параметрів чутливих елементів, розробці методів і алгоритмів обробки та фільтрації вихідних сигналів як в модульованих, так і в демодульованих сигналах, в методах керування чутливим елементом, які реалізують різні режими роботи гіроскопів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась на кафедрі приладів та систем керування літальними апаратами Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" в рамках наступних науково-дослідних робіт:

1. "Розробка методів проектування і випробувань мініатюрних інтелектуальних систем керування безпілотними апаратами" (№ держреєстрації 0108U000514).
2. "Створення фізико-технічних основ побудови мультисенсорних мікромеханічних систем вимірювання кінематичних параметрів" (Договір Ф7/549-2001 від 28.11.2001).
3. "Розробка та дослідження навігаційних систем нового покоління для аерокосмічної техніки з використанням мікромеханічних технологій та GPS/ГЛОНАСС приймачів" (№ держреєстрації 0102U000564).

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є коріолісові вібраційні гіроскопи.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є математичні моделі коріолісових вібраційних гіроскопів, як сенсорів навігаційних систем, методи їх проектування та обробки вихідних сигналів.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є розвиток і узагальнення теорії коріолісових вібраційних гіроскопів, створення на її основі ефективних методів розрахунку та оптимізації вимірювальних характеристик, методів та алгоритмів керування чутливим елементом, компенсації похибок, обробки та фільтрації вихідних сигналів.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно розв'язати наступні групи задач:

1. Розвинути та узагальнити теорію чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів, на основі якої дослідити залежності та похибки вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів від конструктивних параметрів чутливого елемента, прискорень, вібрації, варіацій кутової швидкості та температури; розробити методи розрахунку та оптимізації вимірювальних характеристик, а також методи розрахунку конструктивних параметрів чутливих елементів з метою отримання бажаних вимірювальних характеристик.
2. Розробити математичну модель коріолісових вібраційних гіроскопів в демодульованих сигналах та отримати структурні схеми і передатні функції для використання їх в системах обробки сигналів та автоматичного керування; розробити та дослідити низькорівневі методи компенсації небажаних перехресних зв'язків та перехресної чутливості, методи компенсації похибок вимірювання кутової швидкості.
3. Розробити алгоритми та програмне забезпечення для автоматизованого проектування чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів, які виготовляються за допомогою технологій мікро-електромеханічних

систем, а також системи числового моделювання їх роботи на основі повної математичної моделі в середовищі Сімулінк/Матлаб.

Методи дослідження. Диференціальні рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів було отримано із використанням методів аналітичної механіки, а саме рівняння Лагранжа. Розв'язки рівнянь руху отримані як традиційними методами аналізу диференціальних рівнянь, так і використовуючи запропоновану в роботі модифікацію метода усереднення, отримані рівняння руху чутливих елементів в термінах комплексних амплітудно-фазових змінних, які дозволили проводити аналіз в демодульованих сигналах. Із використанням перетворення Лапласа та методів теорії автоматичного керування були отримані повні та спрощені передатні функції коріолісових вібраційних гіроскопів. Ці передатні функції дозволили синтезувати методи фільтрації шумів вимірювання та стохастичних збурень із використанням методу статичної стохастичної фільтрації Вінера та адаптивної фільтрації за алгоритмом Калмана.

Коректність отриманих результатів та ефективність розроблених методів і алгоритмів перевірялась за допомогою реалістичного числового моделювання в програмному середовищі Сімулінк/Матлаб, а також за допомогою відповідних експериментальних досліджень.

Наукова новизна отриманих результатів. Виконані в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати наступні нові наукові результати:

В науковому плані

- Вперше дістали подальший розвиток та були узагальнені до єдиної системи рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів з поступальними, обертальними та хвильовими первинними та вторинними рухами, на основі розв'язків яких вперше було отримано вирази для розрахунку параметрів первинного і вторинного руху чутливих елементів, розрахунку і оптимізації масштабного коефіцієнта із врахуванням його нелінійності, розрахунку динамічного діапазону, роздільної здатності, зсуву нуля, а також розрахунку похибок вимірювання

кутової швидкості. Вперше отримано точні та наближені вирази для розрахунку параметрів фазової траєкторії руху та власних частот коливань чутливого елемента в залежності від кутової швидкості.

- Вперше розроблено узагальнену математичну модель руху чутливого елемента в демодульованих сигналах в залежності від змінної в часі кутової швидкості, на основі якої вперше отримано точні і спрощені наближені передатні функції коріолісового вібраційного гіроскопа від кутової швидкості до амплітуди вторинних коливань і кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента, вирази для розрахунку і оптимізації динамічної похибки і смуги пропускання, передатні функції статичних систем оптимальної фільтрації шумів вимірювання і стохастичних збурень, передатні функції замкнених систем керування чутливим елементом в режимах компенсаційного та інтегруючого гіроскопа.
- Вперше отримано передатні функції і структуру низькорівневих систем повної та часткової компенсації небажаних перехресних зв'язків і перехресної чутливості в модульованих сигналах, а також структуру і передатні функції систем компенсації і фільтрації температурних похибок вимірювання кутової швидкості.

В прикладному плані

- Розроблено узагальнені методи розрахунку і вибору парціальних частот і коефіцієнтів демпфування первинних і вторинних коливань чутливих елементів задля забезпечення бажаного діапазону лінійного вимірювання кутової швидкості, смуги пропускання та оптимального перехідного процесу, мінімізації зсуву нуля і впливу зовнішніх вібрацій.
- Отримано методи реалізації режимів оптимального збудження первинних коливань за допомогою електростатичного гребінчастого двигуна, які дозволяють значно зменшити рівень шумів на робочій частоті, та досліджено небажаний вплив його конструктивних параметрів на власну частоту первинних коливань.

- Розроблено системи оптимальної фільтрації шумів вимірювання і стохастичних збурень, системи керування демодульованим рухом чутливого елемента в режимах компенсаційного датчика кутової швидкості, інтегруючого гіроскопа, системи компенсації небажаних перехресних зв'язків і температурних похибок, а також системи рекурсивної ідентифікації параметрів динаміки чутливого елемента.
- Розроблено алгоритми та програмне забезпечення для автоматизованого проектування чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів, які виготовляються за допомогою технологій мікро-електромеханічних систем, що значно зменшили час проектування чутливих елементів, а також системи числового моделювання їх роботи на основі повної моделі динаміки чутливого елемента в середовищі Сімулінк/Матлаб.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові та практичні результати дисертаційної роботи були впроваджені:

1. Науково-виробничим об'єднанням Київський завод автоматки ім. Г.І. Петровського у вигляді математичних моделей похибок та методів оптимального проектування чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів, методів та систем усунення небажаних перехресних зв'язків, методів та алгоритмів фільтрації вихідних сигналів та методів керування у режимі інтегруючого гіроскопа. В результаті впровадження зазначених математичних моделей, методів та алгоритмів керування було отримано результати, які підтвердили їх високу ефективність у покращенні вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів.
2. Кафедрою приладів та систем керування літальними апаратами факультету авіаційних і космічних систем Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" в навчальний процес кафедри в лекціях з курсу "чутливі елементи систем керування літальних апаратів" та в науковій роботі магістрів спеціальності 8.100104 «Системи керування літальними апаратами».

Особистий внесок здобувача. Розвинена узагальнена теорія чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів в модульованих та демодульованих сигналах, вирази для розрахунку їх вимірювальних характеристик, методи вибору та оптимізації конструктивних параметрів, структурні схеми та передатні функції в системах фільтрації, керування та компенсації похибок були отримані особисто здобувачем.

Апробація результатів дисертації. Наукові та практичні результати дисертаційної роботи доповідались, обговорювались і отримали позитивну оцінку на: міжнародному симпозіумі по гіроскопічним технологіям в Штутгарті (Symposium Gyro Technology, Stuttgart, Germany, 2002), міжнародних науково-технічних конференціях "Авіа-ІХ" (2009) та "Авіа-Х" (2011) у Національному авіаційному університеті (Київ, Україна), 17-тій Санкт-Петербурзькій міжнародній конференції по інтегрованим навігаційним системам (2010, Санкт-Петербург, Росія), міжнародній науково-технічній конференції IEEE "Методи та системи навігації та керування рухом" (2010, 2012, 2014, Національний авіаційний університет, Київ, Україна), міжнародній науково-технічній конференції "Гіротехнології, навігація керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки" (2011 та 2013, Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна), всесвітньому конгресі "Авіація в ХХІ сторіччі – Безпека в авіаційних та космічних технологіях"(2012, Національний авіаційний університет, Київ, Україна).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 30 наукових праць, у тому числі 1 монографія в іноземному видавництві, 19 статей у наукових фахових виданнях, з яких 3 статті у виданнях іноземних держав, 10 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура і об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, 7-ох розділів, висновків, списку літератури та додатків, і викладена на 245 сторінках, включаючи 135 рисунків, 1 таблицю, список літератури зі 159 публікацій на 16 сторінках, та додатку.

РОЗДІЛ 1

КОНСТРУКЦІЇ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ

Застосування сучасних технологій мікроелектроніки для масового виробництва мікро-електромеханічних систем дозволив створювати мініатюрні датчики кутових швидкостей та застосовувати їх у багатьох областях, де використання гіроскопів вважалося неефективним як з економічної точки зору, так і з точки зору масових та габаритних обмежень. Із врахуванням особливостей технологій виробництва, практично необмеженому потенціалу щодо мініатюризації, відносній простоті конструкцій їх чутливих елементів, переважна більшість сучасних мініатюрних датчиків кутової швидкості побудовано на основі використання ефекту Коріоліса для вимірювання кутової швидкості обертання. Такі датчики отримали назву коріолісових вібраційних гіроскопів (КВГ).

В цьому розділі ми коротко розглянемо принцип роботи коріолісових вібраційних гіроскопів, запропонуємо класифікацію та розглянемо конструктивні особливості існуючих схем побудови їх чутливих елементів, а також зробимо огляд публікацій щодо теорії та методів їх проектування.

1.1 Принцип роботи коріолісових вібраційних гіроскопів

Традиційний механічний гіроскоп складається з ротора, змонтованого всередині двохрамкового карданового підвісу, що забезпечує ротору два степеня вільності на доданок до одного, який відповідає його власному обертанню [1], [2], [4]. Така конструкція часто називається *вільним гіроскопом*. Вільний гіроскоп зберігає орієнтацію осі його власного обертання відносно інерціальної системи відліку, яка зазвичай вважається зафіксованою до зірок. Це явище використовується для визначення орієнтації користувача по відношенню до інерціальної системи відліку, коли пряме спостереження орієнтації неможливе. Коли зовнішня рамка вільного гіроскопа знімається, а та, що залишилася, забезпечує лише один кутовий степінь вільності, і коли основа

починає обертатися, ротор, що обертається, рухається таким чином, щоб сумістити вісь свого власного обертання з віссю зовнішньої кутової швидкості. Це явище використовується для побудови таких гіроскопічних приладів як штучні горизонти та гіроскопічні компаси, де зовнішня кутова швидкість продукується власним обертанням Землі [7], [29]. Однак, якщо приєднати пружину до рамки карданового підвісу, що залишилася, таким чином запобігаючи суміщенню осей ротора і кутової швидкості, кінцеве відхилення рамки лінійно зв'язане із амплітудою зовнішньої швидкості і дозволяє її вимірювання. Такий прилад називається *датчиком кутової швидкості* [8]. З цього випливає, що використання датчиків кутової швидкості замість вільних гіроскопів є більш дешевим, хоча і менш точним шляхом побудови приладів інерціальної навігації. З того часу було розроблено багато різних конструкцій датчиків кутової швидкості і посеред них вібраційні гіроскопи захопили нішу сучасних електромеханічних датчиків [9], [10].

Головна ідея вібраційних гіроскопів полягає в тому, щоб замінити ротор, що постійно обертається, віброуючою структурою, і скористатися коріолісовим ефектом, що викликає вторинний рух, який пов'язаний із зовнішньою кутовою швидкістю. Цей тип датчиків кутової швидкості зазвичай називається *коріолісовим вібраційним гіроскопом* (КВГ).

В більшості коріолісових вібраційних гіроскопів чутливий елемент може бути представлений як інерційний елемент m і пружний підвіс з двома переважними степенями вільності: вертикальним і горизонтальним, як показано на рис. 1.1.

Масивний інерційний елемент m часто називають *інерційною масою* подібно до терміну, що використовується в акселерометрах. Чутливий елемент змушують коливатися по одній із своїх мод з призначеною амплітудою. Цей рух зазвичай називається первинною модою або первинним рухом. Коли чутливий елемент обертається навколо частинної осі тіла, яка називається віссю чутливості (перпендикулярна до площини рис. 1.1), так званий *ефект Коріоліса*

змушує інерційну масу рухатися в перпендикулярному напрямку, таким чином спричиняючи вторинний рух.

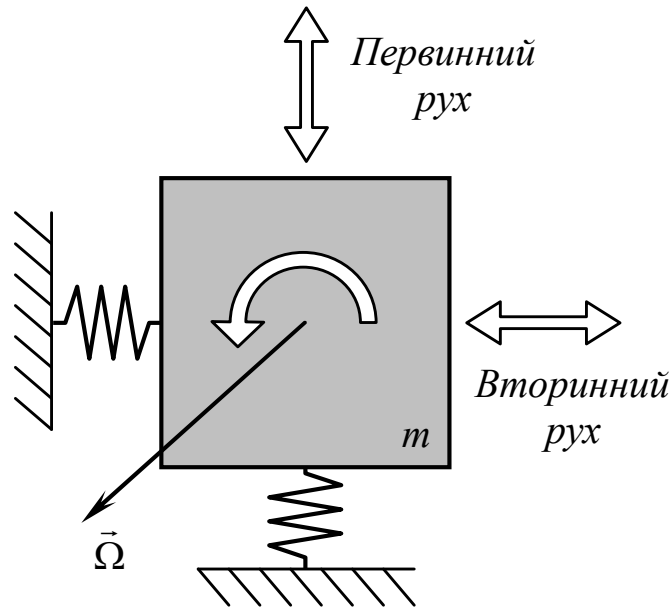


Рис. 1.1. Принцип роботи КВГ

Цей ефект визначається фіктивною силою Коріоліса

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (1.1)$$

Тут \vec{v} є вектором швидкості первинного руху, $\vec{\Omega}$ - зовнішньою кутовою швидкістю. Дійсно, ми маємо два рухи, які є динамічно пов'язані завдяки ефекту Коріоліса. Якщо немає зовнішньої кутової швидкості ($\Omega = 0$), вторинний рух відсутній, оскільки немає коріолісового поєднання.

У вібраційних гіроскопах цей первинний рух спроектований як коливальний. В результаті вторинний рух стає також коливальним. Надалі, збуджені коливання будемо називати первинними коливаннями, а коливання, викликані кутовою швидкістю, - вторинними коливаннями або вторинною модою.

На відміну від класичних датчиків кутової швидкості, які базуються на електромеханічних гіроскопах з кардановим підвісом, інформація про

зовнішню кутову швидкість міститься в амплітуді цих вторинних коливань, а не в будь-якому карданному відхиленні.

Використання коливального руху замість обертання, як в традиційних гіроскопах, дозволяє уникати проблем, що відносяться до небажаних рухів, спричинених тертям в підшипниках карданового підвісу. Це також суттєво спрощує конструювання чутливого елемента, оскільки відсутні електричні двигуни, що також робить вібраційні гіроскопи придатними до мініатюризації.

Також важливо відмітити, що КВГ може працювати в двох режимах: як датчик кутової швидкості, який вимірює зовнішню кутову швидкість, і в так званому «цілокутовому» режимі, що продукує, в дійсності, кут обертання, який є *проінтегрованою* кутовою швидкістю. Останнього можна досягти або спеціальною конструкцією чутливого елемента, що призводить до незначного демпфування, або за допомогою особливого конструювання системи керування із зворотним зв'язком. Іронічно, що хоча інтегруючий КВГ розглядається як найбільш передовий і складний порівняно із датчиками кутової швидкості, але найперший вібраційний гіроскоп, а саме маятник Фуко, був сам по собі інтегруючим КВГ.

1.2 Класифікація коріолісових вібраційних гіроскопів

Взагалі, можливо конструювати гіроскопи із різними типами первинних і вторинних коливань. Наприклад, поєднання поступальних первинних коливань і обертальних вторинних було здійснено в так званих камертонних гіроскопах. Рідше згадується, що природа первинного руху необов'язково повинна бути коливальною, але може бути також і обертальною. Такі гіроскопи називаються обертальними вібраційними гіроскопами. Однак, зазвичай більш зручно для вібраційних гіроскопів їхнє виконання з тим ж самим типом і природою первинних і вторинних коливань.

В залежності від числа використовуваних інерційних елементів, природи первинного і вторинного рухів чутливого елемента, класифікацію вібраційних гіроскопів можна подати у вигляді, показаному на рис. 1.2.

Поділ верхнього рівня дається на основі природи руху чутливого елемента. В нашому випадку, він може бути або коливальним, або обертальним. Роторний вібраційний гіроскоп (РВГ) є прикладом обертального вібраційного гіроскопа [12], [24].

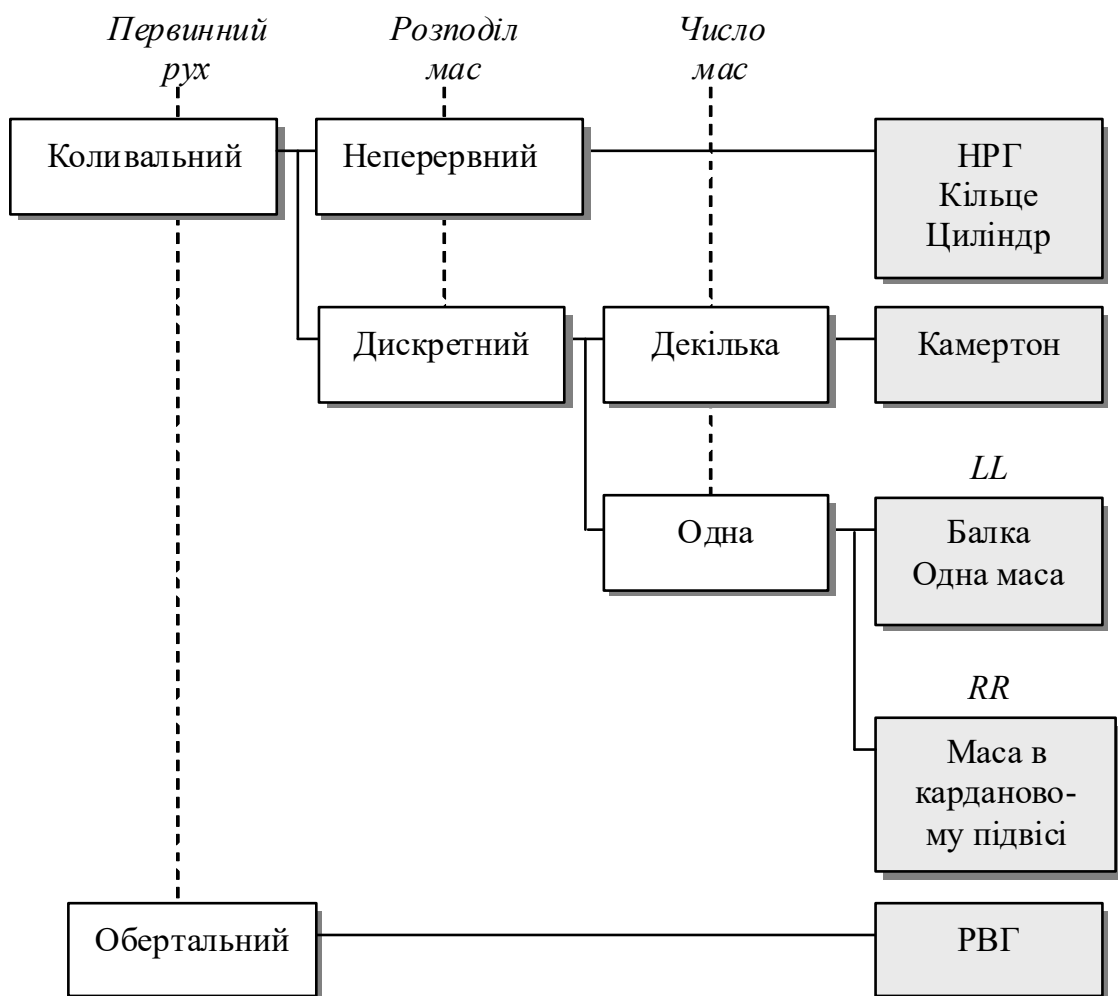


Рис. 1.2. Класифікація коріолісових вібраційних гіроскопів

Наступний рівень містить розгляд загального підходу до конструювання чутливого елемента. Зокрема, конструювання вібраційного чутливого елемента

може базуватися неперервному вібраційному середовищі або дискретному (сконцентровані маси). Відповідні математичні моделі базуються або на диференціальних рівняннях у частинних похідних, а саме модифікованому хвильовому рівнянні, або системах звичайних диференціальних рівнянь.

Третій рівень класифікації базується на кількості вібруючих сконцентрованих мас (одна або декілька).

Нарешті, чутливі елементи КВГ можна класифікувати на підставі поєднання типів рухів, що використовуються в первинних і вторинних рухах: поступальний (прямолінійний) і обертальний. Для того, щоб позначати типи первинних і вторинних рухів, зазвичай приймаються наступні скорочення: «L» для прямолінійних, та «R» для обертальних. Наприклад, якщо в чутливому елементі використовується прямолінійний рух як для первинних, так і для вторинних коливань, він позначається як «LL».

Запропонована тут класифікація не тільки допомагає застосувати відповідні методи математичного моделювання, але також слугує у якості дерева прийняття рішення в процесі розробки нових типів чутливих елементів КВГ.

1.3 Конструкції чутливих елементів

Цілеспрямовані зусилля розробників щодо мініатюризації гіроскопів, яка б дозволила значно розширити діапазон їх застосування, призвели до використання способів виробництва із мікроелектроніки та мікро машинобудування для створення чутливих елементів КВГ. На такі КВГ часто посилаються як на мікромеханічні або МЕМС (мікро-електро-механічні системи) гіроскопи. Через доволі суворі обмеження щодо складності механічних структур, які можуть виготовлятися із застосуванням мікромашинних процесів, більшість сучасних конструкцій мікромеханічних гіроскопів використовують просту структуру, яка складається із однієї або декількох масивних елементів прикріплених до основи за допомогою пружного

підвісу. Головною метою пружного підвісу є забезпечення інерційним масам щонайменше двох ортогональних степенів вільності, дозволяючи первинні і вторинні коливання. Інша задача, яка зазвичай пов'язана із конструюванням пружного підвісу, є забезпечення достатнього механічного роз'єднання між первинними і вторинними коливаннями, зменшуючи таким чином так звані квадратурні помилки.

Давайте тепер подивимось більш прискіпливо на особливості в наведений вище класифікації конструкцій чутливих елементів. І будемо продовжувати не в порядку появи в класифікації, а починаючи з найбільш простого.

Одна маса і вібруюча балка

Традиційна конструкція чутливого елемента одномасового КВГ бере початок від найпершого вібраційного гіроскопа, а саме маятника Фуко. Хтось може правильно заперечити, що природа сама вийшла з цією конструкцією, оскільки жужальця, які мають більшість літаючих комах, являють собою лише прості гіроскопи з вібруючою балкою, що дозволяє комахам керувати своїм льотом.

Існує декілька прикладів такої конструкції гіроскопа з однієї сконцентрованою масою. Першим є проста інерційна маса приєднана до основи за допомогою пружної ніжки, яка може відхилятися у двох ортогональних напрямках (див. рис. 1.3) [10].

Первинні коливання такого оберненого маятника збуджуються вздовж одного напрямку, а коли основа обертається навколо вертикальної осі, інерційна маса починає колитися в ортогональному, вторинному напрямку. За умови, що чутливий елемент КВГ складається із однієї пружно підвішеної інерційної маси, і в конструкції немає інших суттєвих мас, тоді така конструкція називається *одномасовим* КВГ.

Для спрощення процесу виробництва, одномасовий чутливий елемент може виготовлятися у формі квадратної або трикутної балки [43], як показано на рис. 1.4.

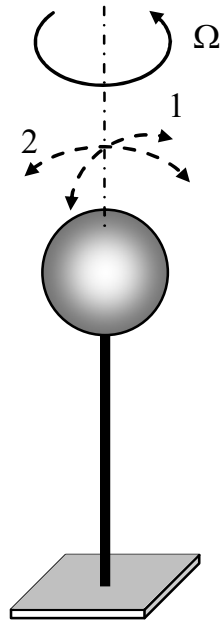


Рис. 1.3. Одномасовий КВГ

(1 – первинний рух, 2 – вторинний рух)

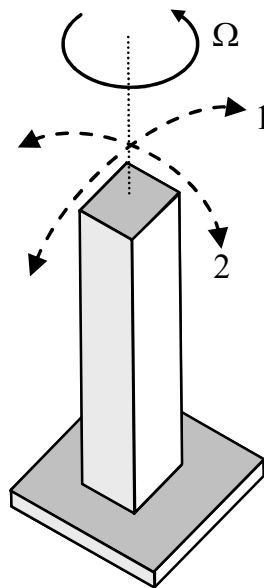


Рис. 1.4. КВГ з вібруючою балкою

(1 – первинний рух, 2 – вторинний рух)

Не дивлячись на те, що балка сама по собі має всі риси вібраційного датчика з неперервним середовищем, її динаміка і робота у якості датчика кутової швидкості достатньо добре описується звичайними диференціальними рівняннями. Тому ця конструкція була розміщена у дискретній гілці класифікації, а не в розподіленій.

Є багато різних шляхів приводити в дію і реєструвати рух балкового чутливого елемента. Однак, якщо балка зроблена із кварцу, тоді для побудови систем приводу і реєстрації зазвичай використовуються її п'єзоелектричні і п'єзо-резистивні властивості [39].

Цей принцип був також використаний при розробці першого коріолісового мікромеханічного гіроскопа у 1981 році [22]. Прикладами використання цієї конструкції також є кремнієвий мікромеханічний гіроскоп, у якому первинні коливання збуджуються за допомогою п'єзоелементів [60], а вторинні реєструються ємнісною системою. Крім цього додаткова інерційна маса може бути закріплена на кінці такого стрижня для підвищення його чутливості [97]. Комерційний гіроскоп Gyrostar, у якому використовується вібруюча призма, був розроблений компанією Мюрата.

Хоча вібруюча балка є структурою, яку легше зробити, ніж обернений маятник на рис. 1.3, коли вступають в дію мікромашинні технології, найкращою конструкцією для чутливого елемента була б плоска. Якщо всі структурні складові чутливих елементів розташовані в одній площині, було б легше виробляти їх з однієї кремнієвої пластини, наприклад. Цей тип чутливих елементів складається з мініатюрною інерційною масою, яка приєднана до або до основи, або до додаткової рамки за допомогою пружних елементів – поступальних пружин або торсіонів [36].

Приклад такої плоскої одномасової конструкції показаний на рис. 1.5. Тут первинні коливання (1) центральної інерційної маси m збуджуються зазвичай за допомогою електростатичного гребінчастого приводу в площині конструкції, а коли основа починає обертатися, вторинні коливання (2) поза площиною

реєструються і використовуються для вимірювання кутової швидкості. Оскільки обидва рухи є поступальними, така конструкція буде маркуватися як «LL» (лінійні первинні і лінійні вторинні [56], [62]) згідно із класифікацією на рис. 1.2.

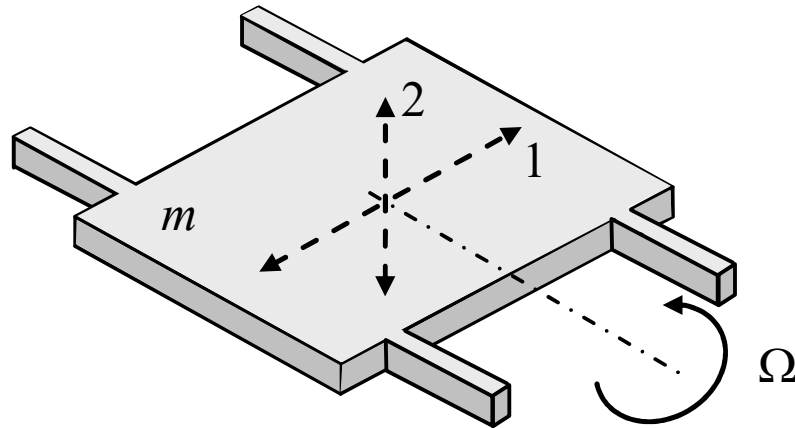


Рис. 1.5. Плоский одномасовий КВГ
(1 – первинний рух, 2 – вторинний рух)

Пружний підвіс для інерційної маси може бути також сконструйований таким чином, щоб дозволити як первинним так і вторинним рухам з’являтися в одній площині (повторюючи схему на рис. 1.1). В цьому випадку буде виявлятися кутова швидкість поза площиною. Поєднуючи цю конструкцію разом з наведеною на рис. 1.5, можна зробити в одній плоскій пластині повний ряд датчиків з трьома ортогональними осями.

Одна маса з додатковою рамкою

Простота конструкції одномасових КВГ однак не приходить безкоштовно. Відколи одна послідовність гнучких балок використовується для полегшення первинних і вторинних рухів, навіть мала помилка у виготовленні, що має результатом неортогональність пружних осей балки підвісу, може спричинити

серйозну помилку, коли вторинний рух з'являється не через зовнішню кутову швидкість, а виробляється безпосередньо системою приводу через пружний перехресний взаємозв'язок. Для того, щоб подолати цю проблему, додається розв'язуюча рамка, розділяючи балки, які відповідають за первинний і вторинний рухи (рис. 1.6). Інерційна маса m_1 розміщується всередині розв'язуючої рамки m_2 і приєднана до неї за допомогою гнучких балок, що дозволяє інерційній масі рухатися тільки вздовж вторинного напрямку.

Розв'язуюча рамка фіксується на основі іншою групою балок, яка сприяє тільки первинному рухові розв'язуючої рамки [75], [85]. У випадку, коли обидва первинний і вторинний рухи відбуваються у площині чутливого елемента, вимірюється (вертикальна) кутова швидкість, що не належить площині. Вторинний рух, що не належить площині, для інерційної маси можна забезпечити відповідно сконструйованими внутрішніми балками, і тоді можна вимірювати кутову швидкість, що належить площині.

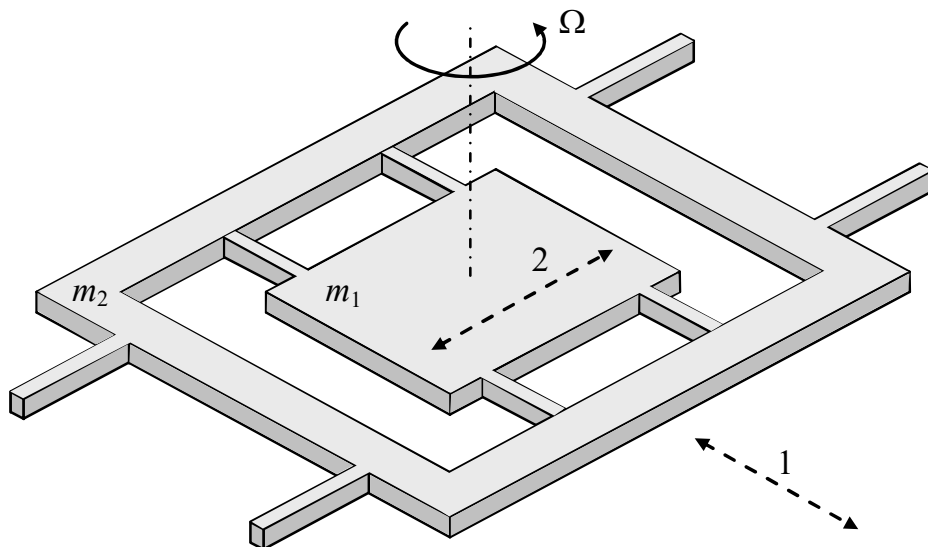


Рис. 1.6. Одномасовий LL КВГ з розв'язуючою рамкою
(1 – первинний рух, 2 – вторинний рух)

Подібно до попередньої конструкції, цей чутливий елемент також являє собою LL-гіроскоп. Однак, якщо гнучкі балки пружного підвісу замінити торсіонними пружними елементами, забезпечуючи таким чином обертальний рух для первинних і вторинних коливань, ця конструкція може трансформуватися в RR-гіроскоп, як показано на рис. 1.7, і часто називається *карданний* КВГ, оскільки розв'язуюча рамка схожа на карданний підвіс у традиційних гіроскопах ([34], [41]). Тут первинні і вторинні рухи є крутильними коливаннями, що з'являються навколо осей відповідних торсіонних балок. Кутова швидкість, що не належить площині, вимірюється, коли виявляються вторинні крутильні коливання. Для того, щоб створити додаткові кутові інерційні властивості для центральної інерційної маси m_1 , до неї зазвичай додаються масивні інерційні елементи.

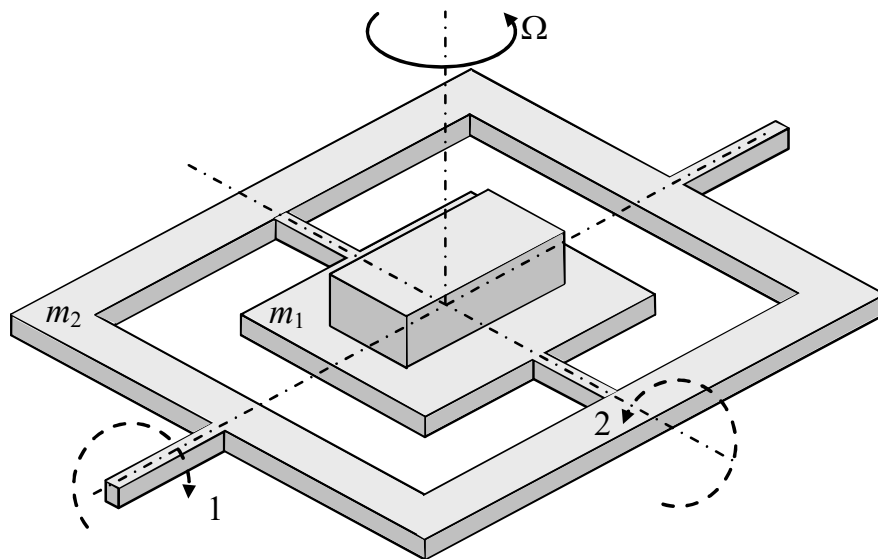


Рис. 1.7. Карданний КВГ (RR чутливий елемент)

(1 - первинний рух, 2 - вторинний рух)

Ці додаткові інерційні елементи можуть мати різну форму, таку як брусок (як показано на рис. 1.7), сферу, циліндр, і т. д. Вибір форми визначається

бажанням забезпечити певні оптимальні співвідношення між моментами інерції чутливого елемента, але також залежить від доступної технології виробництва.

Melexis MLX90609-N2 є прикладом комерційного вібраційного гіроскопа з використанням віброуючих пластин, де чутливий елемент складається з інерційної маси у кардановому підвісі.

Колісний гіроскоп

Іншою конструкцією чутливого елемента КВГ, яка базується на обертальних первинних і вторинних рухах, є так званий *колісний* гіроскоп [61], [73] (див. рис. 1.8).

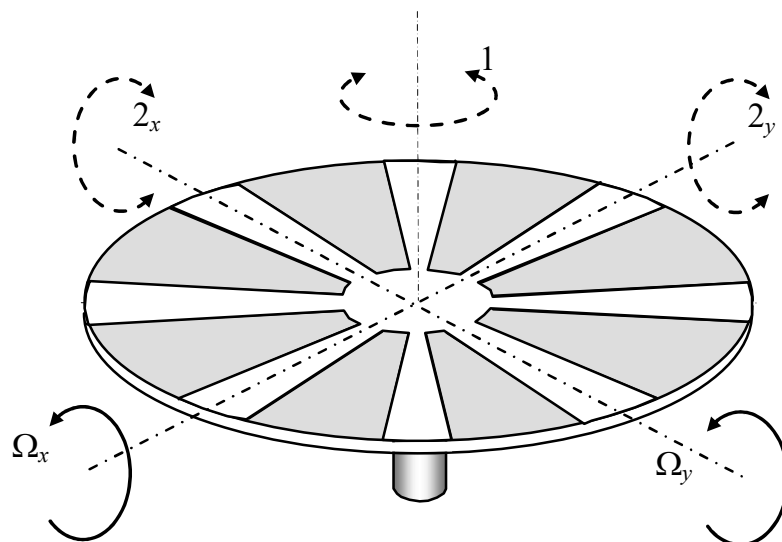


Рис. 1.8. Колісний КВГ (RR чутливий елемент)

(1 – первинний рух, 2 – вторинний рух)

Масивний диск приводиться до первинних крутильних коливань навколо вертикальної осі, що не належить площині. Дві взаємно перпендикулярних складові Ω_x і Ω_y зовнішньої кутової швидкості, що лежать в площині, можуть

відчуватися, коли вторинні кутові коливання диску виявляються навколо відповідних осей.

Чутливий елемент колісного КВГ є більш складною з виробничої точки зору структурою, якщо порівнювати з розглянутою раніше одномасовим і карданним гіроскопами. Конструктори зіштовхуються із проблемою забезпечення можливості для диску вібрувати навколо трьох взаємно перпендикулярних осей. Що впадає у вічі, так це очевидна схожість колісного КВГ з динамічно налаштованими гіроскопами, де структура підвісу ротора розв'язує суттєво ту ж саму задачу.

Вібруючий диск, що чутливим елементом RR типу, використовується у багатьох комерційних двох-компонентних мікромеханічних гіроскопах (здатних вимірювати дві складові переносної кутової швидкості). Наприклад у Bosch SMG060 та у серії LPR компанії STMicroelectronics.

Камертонні гіроскопи

Після того, як ми розглянули гілки одномасових гіроскопів відповідно до класифікації, наведеної на рис. 1.2, перейдемо зараз до гілки декількох інерційних мас. Класична камертонна конструкція показана на рис. 1.9.

Тут зубці змушують коливатися у протилежних напрямках, але навколо тієї ж самої осі. Коли прикладається зовнішнє обертання навколо вертикальної осі, з'являється вторинний рух зубців також в протилежних напрямках. На доданок до цього, коріолісові сили в кожному зубці при об'єднанні продукують гармонічний момент навколо вертикальної осі. В результаті, якщо ніжка дозволяє обертання, вся структура може також почати коливатися навколо вертикальної осі.

В залежності від принципу виявлення вторинного руху, як вторинне відхилення зубців, так і обертання всієї структури, можуть бути використані для вимірювання зовнішньої кутової швидкості.

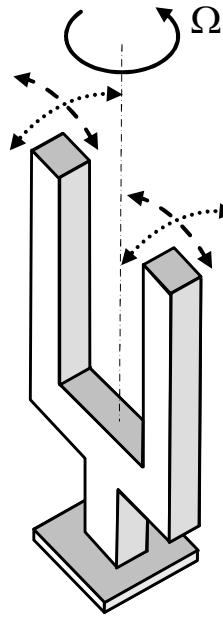


Рис. 1.9. Традиційний камертон
(пунктирні стрілки – первинний рух, точкові – вторинний рух)

Причина мати дві або більше інерційних мас замість однієї, полягає в можливості застосування диференційної схеми вимірювання, коли сигнали від виявлених вторинних рухів кожного зубця об'єднуються (зазвичай просто віднімаються) для того, щоб усунути додатні складові цих сигналів. В той же час, корисна частина сигналів буде подвоюватись. Хтось може відмітити, що таке ж саме диференційне вимірювання може бути зроблене із застосуванням двох одномасових КВГ, які просто приводяться в рух в протилежних фазах. Однак, завдяки пружному зв'язку через спільну ніжку, зубці будуть природно синхронізувати свої спільні рухи, що призводить до ідеальних протифазних коливань. Більш складно досягти такого ж самого настроювання для двох різних, не зв'язаних, одномасових чутливих елементів.

Для створення більших можливостей для корисного об'єднання сигналів від різних джерел і використання самонастроювання навіть більше ніжок додаються до чутливого елементу (див. рис. 1.10 та 1.11).

Додаткові ніжки також підсилюють кінцевий коріолісовий ефект і дозволяють також більше різних способів комбінацій «збудження-відчуття».

Наприклад, перший мініатюрний гіроскоп, який з'явився на ринку у 1980 році, а саме Systron Donner/BEI QRS (quartz rate sensor), мав чутливий елемент, який складався з чотирьох вібруючих стрижнів (двох камертонів) у формі літери Н [109].

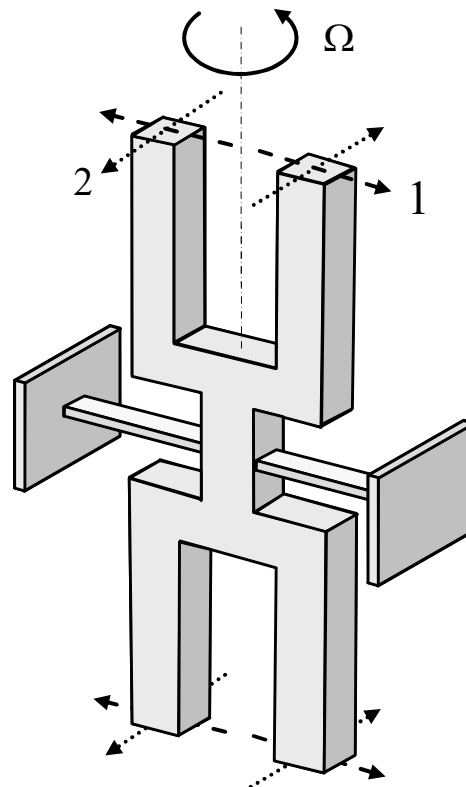


Рис. 1.10. Подвійний камертон

(пунктирні стрілки – первинний рух, точкові – вторинний рух)

Подібно до простої вібруючої балки, такі камертони зазвичай виробляються із кварцу, дозволяючи використовувати п'єзоелектричний ефект для збудження і відчуття. Однак, якщо використовуються виробничі технології із мікроелектроніки, тоді такі конструкції мають певні обмеження завдяки відносній складності їхніх тривимірних структур.

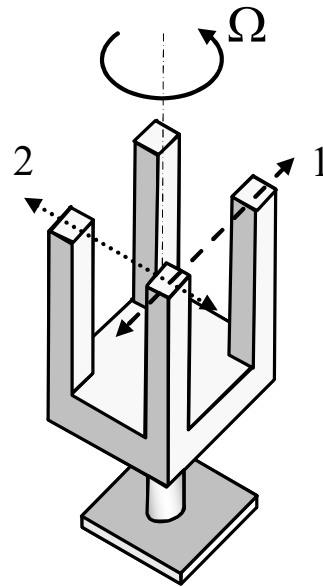


Рис. 1.11. Камертон з декількома ніжками
(пунктирні стрілки – первинний рух, точкові – вторинний рух)

Напевно проста плоска конструкція є найкращою з мікромашинної точки зору [48], [49], [55]. Ця площина може бути або паралельна до площини основи, як у датчиках Bosh SMG074 [68], Analog Devices ADXRS150 [106] та STMicroelectronics LISY300AL [117], або перпендикулярною до неї, як у гіроскопах сімейства IDG компанії Invensense [122]. Прикладом кремнієвого камертонного чутливого елемента, який складається з традиційних вібруючих у протифазах стрижнів є датчик кутової швидкості, виготовлений компанією Daimler-Benz [79].

Один із прикладів таких конструкцій показаний на рис. 1.12.

Тут дві інерційні маси m_1 і m_2 примушуються коливатися в протилежних напрямках, і вторинний рух, який є обертанням спільної рамки m_3 навколо осі чутливості (осі зовнішньої кутової швидкості), виявляється в напрямку, що не лежить в площині. Гнучкі балки інерційних мас сконструйовані таким чином, що вони дозволяють з'являтися тільки первинному рухові інерційних мас.

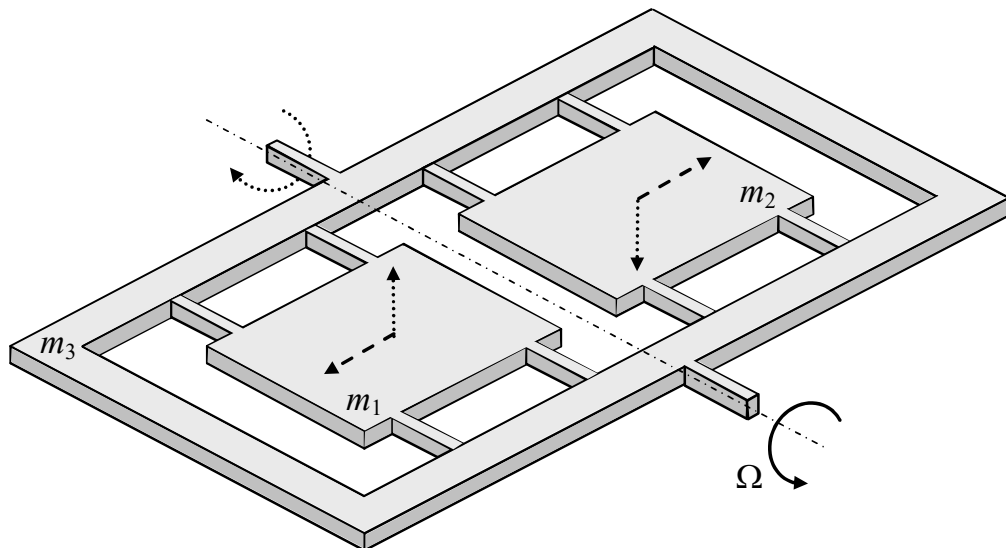


Рис. 1.12. Плоска конструкція камертонного КВГ
(пунктирні стрілки – первинний рух, точкові – вторинний рух)

Оскільки первинний рух інерційних мас є поступальним, а вторинний - обертанням спільної рамки, ця конструкція буде позначатися як LR у відповідності до нашої класифікації.

Твердотільний хвильовий гіроскоп

Одним із найбільш відомих прикладів коливального гіроскопа із неперервним вібруючим середовищем є твердотільний хвильовий гіроскоп (ТХГ). Конструкція чутливого елемента ТХГ зазвичай базується на резонуючій оболонці, яка має напівсферичну або так звану «бокальну» форму (див. рис. 1.13).

Первинні коливання забезпечуються стоячою хвилею, що збуджується на ободі оболонки. У випадку відсутності зовнішньої кутової швидкості, вузли хвилі, що розташовані під кутом 45° від первинної осі I , не рухаються. Якщо чутливий елемент обертається навколо осі чутливості, яка є перпендикулярною

до площини хвилі, коріолісовий ефект змушує хвилю зміщуватись навколо ободу.

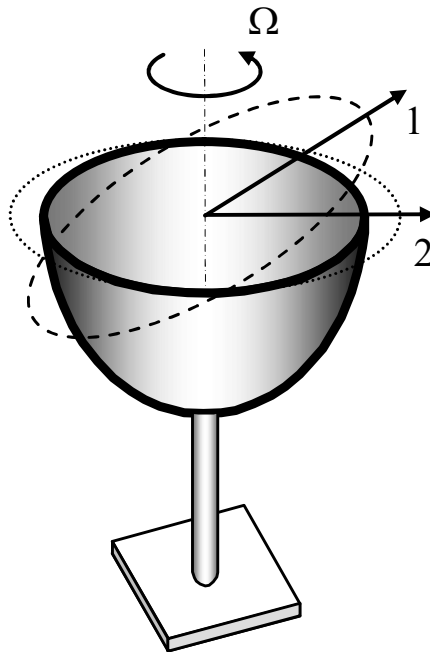


Рис. 1.13. Напівсферичний резонуючий гіроскоп
(пунктиром – первинний рух, крапками – вторинний рух)

В результаті, коливання можуть тепер виявлятися у вузлах, і ці вторинні коливання відносяться до зовнішньої кутової швидкості. Незважаючи на високі характеристики, які забезпечуються традиційним ТХГ, складність і висока собівартість виробництва ідеальної віброуючої напівсфери забороняють її масове застосування, включаючи цивільні використання.

Для того, щоб зменшити собівартість разом із прийнятним погіршенням характеристик, були запропоновані декілька спрощених конструкцій. Зокрема, напівсферична форма оболонки була замінена на циліндр із тонкими стінками (рис. 1.14, [44]) або кільце (рис. 1.15, [53]).

Всі ці конструкції мали на меті забезпечення вібраційної здатності неперервного середовища кільцевої форми разом із можливістю збуджувати і виявляти коливання в цьому кільці.

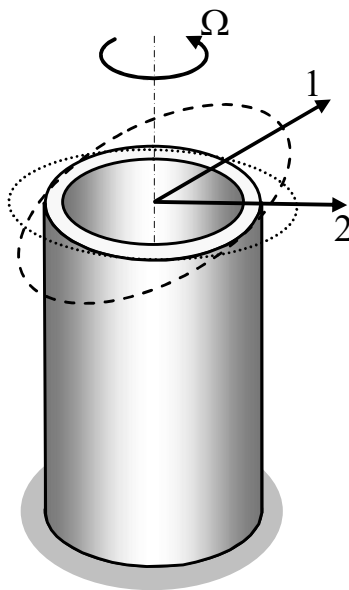


Рис. 1.14. Циліндричний КВГ

(пунктиром – первинний рух, крапками – вторинний рух)

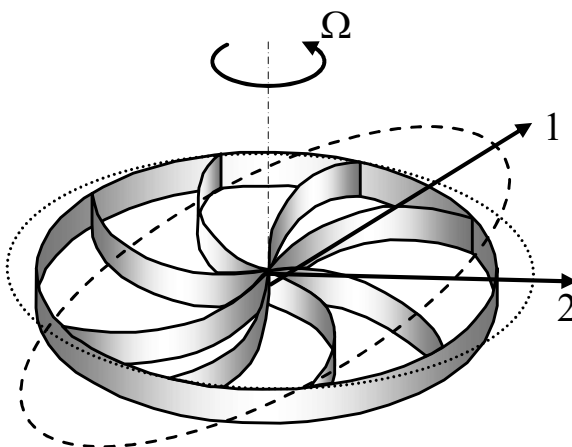


Рис. 1.15. КВГ у формі кільця

(пунктиром – первинний рух, крапками – вторинний рух)

Остання кільцеподібна конструкція також придатна для мікромашинного застосування і має певний потенціал для мініатюризації. Головний недолік цього спрощення впливає із неідеальностей резонатора.

Як результат, - відносно високе демпфування і вторинні коливання, які не викликані зовнішньою кутовою швидкістю, значно зменшують характеристики цих гіроскопів.

Не зважаючи на це, є багато не таких вибагливих застосувань, де такі датчики із низькими характеристиками можуть успішно використовуватись.

1.4 Огляд публікацій по теорії коріолісових вібраційних гіроскопів

Розглянемо основні результати по математичному моделюванню руху чутливих елементів, методів їх проектування, системам фільтрації, обробки сигналів та керування, які було опубліковано до отримання результатів дисертаційного дослідження.

Математична модель чутливого елемента базується на аналізі його диференціальних рівнянь руху, які отримуються із використанням класичних методів теоретичної механіки. Ці рівняння доповнюються різними зовнішніми силами, які діють на чутливий елемент, і ефект яких необхідно проаналізувати.

Одну з простіших і найбільш поширених форм рівнянь руху чутливого елемента вібраційного гіроскопа було показано в роботі Брозгуля і Смірнова [10]. В цій моделі розглядається лише вторинний рух коливальної системи під дією виключно сили Коріоліса. Вплив обертального та центробіжного прискорень зазвичай ігнорується.

Такий підхід к математичному моделюванню руху чутливого елемента є дуже поширеним і часто використовуються навіть у теперішній час.

Прикладом спроби сумісно проаналізувати первинний і вторинний рух чутливого елемента для простого одномасового вібраційного гіроскопа, та отримати розв'язки системи двох рівнянь є робота Фрідленда і Хаттона [19]. Тим не менш, отримані наближені розв'язки системи рівнянь є дуже громіздкими і не дозволяють їх ефективно застосовувати для подальшого аналізу.

Базові питання аналізу динаміки карданового вібраційного гіроскопа та створення математичної моделі руху його чутливого елемента було розглянуто в роботах [46] та [47], де було отримано лінеаризовані рівняння руху чутливого елемента, проаналізовані його власні частоти та вплив конструктивних параметрів на його частотні характеристики. В доповіді [73] розглянуто принцип дії та основні похибки карданового вібраційного гіроскопа.

Базові рівняння руху традиційних камертонних гіроскопів та принцип їх дії наводились в книгах [32] та [10].

Динаміка п'єзоелектричних гіроскопів з вібруючою балкою розглядалась в [39]. Було отримано спрощені лінеаризовані рівняння руху чутливого елемента із врахуванням п'єзоелектричних ефектів.

Однією з важливих робіт, присвячених математичному моделюванню руху простого одномасового чутливого елемента є стаття Лінча [54]. В ній розглядається модель простої маси у пружному підвісі, яка здійснює поступальний первинний і вторинний рухи. Завдяки симетричності спрощених рівнянь, вони об'єднувалися до одного рівняння із комплексною змінною. Метод усереднення використовувався для наближеного аналізу руху чутливого елемента та отримання закону керування для режиму інтегруючого гіроскопа.

Аналіз динаміки хвильового твердотілого гіроскопа наведено в [31], де сферичного чутливого елемента за допомогою хвильових рівнянь і відрізняється від моделі із зосередженими масами, яка вважається найбільш придатною для ефективного узагальненого аналізу коріолісових вібраційних гіроскопів.

Загальними рисами наведеного вище стану аналізу динаміки руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів є наступне: в рівняннях руху нехтують обертальними та центробіжними прискореннями, розглядається або тільки рівняння вторинних коливань, або дуже спрощена система рівнянь для однієї маси; розв'язання рівнянь і аналіз руху виконується числовими методами; методи розрахунку вимірювальних характеристик на основі розв'язків рівнянь руху відсутні.

Узагальнення рівнянь руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів з поступальним та обертальним рухом із врахуванням динаміки додаткової рамки було продемонстровано автором в [104] та [118]. Об'єднання рівнянь руху карданового та камертонного гіроскопів разом із рівнянням роторного вібраційного гіроскопа в рамках спрощеної до одного рівняння моделі було зроблено в [125]. Узагальнення до єдиної системи рівнянь моделей руху чутливих елементів поступальних, обертальних, камертонних та кільцевих гіроскопів зроблено не було.

Розрахунок та оптимізація вимірювальних характеристик конкретних конструкцій коріолісових вібраційних гіроскопів зазвичай проводиться із використанням числового моделювання [58], а також числового розв'язку рівнянь руху чутливих елементів [98].

Вивчення впливу змінної кутової швидкості, аналіз динамічної похибки та розрахунок смуги пропускання вимагають виконання математичної демодуляції отриманих розв'язків [104], [124], [125], та не дозволяють ефективно проводити подальший аналіз та оптимізацію смуги пропускання.

З точки зору систем автоматичного керування, динаміка коріолісових вібраційних гіроскопів розглядається переважно в термінах передатних функцій коливальних ланок, які описують первинний і вторинних рух чутливого елемента [98], [117], [126]. Треба зазначити, що при такому підході кутова швидкість входить до структурної схеми як невідомий коефіцієнт. Синтез керування обмежується позиційними та швидкісними зворотними зв'язками, які впливають на ефективну частоту та демпфування чутливого елемента [124], [128].

Першою з відомих спроб перейти до аналізу динаміки коріолісових вібраційних гіроскопів в системах керування, при якому кутова швидкість виступає в якості входу, було зроблено в [103]. За рахунок розглядання спрощеної моделі одномасового вібраційного гіроскопа, значного спрощення структурної схеми та лінеаризації нелінійної частини демодулятора було отримано представлення динаміки чутливого елемента аперіодичною

динамічною ланкою. Аналогічну процедуру для дискового вібраційного гіроскопа було продемонстровано в [124]. Задач синтезу оптимальних систем фільтрації або керування із використанням отриманих передатних функцій раніше розв'язано не було.

1.5 Висновки

Різниця між чутливими елементами більшості сучасних коріолісових вібраційних гіроскопів лежить, головним чином, в конструкціях власне мас і пружних підвісів, а не в принципі роботи або математичної моделі їх руху. Зазначені особливості дозволяють класифікувати чутливі елементи за природою первинних і вторинних рухів, типом або кількістю інерційних мас.

Аналіз публікацій по теорії та методам проектування коріолісових вібраційних гіроскопів показав, що рух їх чутливих елементів зазвичай вивчається із використанням спрощених математичних моделей, побудованих на основі базових рівнянь руху, в яких відсутні важливі складові прискорення, що не дозволяють, наприклад, вивчати обмежений нелінійністю масштабного коефіцієнта діапазон вимірювання, або вплив змінного у часі характеру кутової швидкості.

Існуючі математичні моделі розроблялися та можуть застосовуватися лише до конкретних конструкцій чутливих елементів, не дозволяючи їх узагальнення. Аналіз динаміки чутливих елементів проводиться в термінах їх модульованих первинних та вторинних рухів за умов сталої кутової швидкості, де кутова швидкість виступає в якості невідомого коефіцієнта, а не в якості входу до вимірювальної динамічної системи, що б дозволило застосовувати існуючі методи синтезу систем фільтрації та керування. Аналіз динамічної похибки та методи розрахунку смуги пропускання вимагають при цьому проводити демодуляцію отриманих розв'язків.

Системи керування синтезуються за допомогою охоплення чутливих елементів позиційним та швидкісним зворотним зв'язком, коефіцієнти яких

обираються емпірично, або за допомогою числового моделювання. Розрахунок та оптимізація вимірювальних характеристик конкретних конструкцій коріолісових вібраційних гіроскопів зазвичай проводиться із використанням числового моделювання, а також числового розв'язку рівнянь руху чутливих елементів.

Враховуючи величезне розповсюдження коріолісових вібраційних гіроскопів в сучасних системах навігації, керування та в якості датчиків руху в пристроях мобільної комунікації, і враховуючи існуючі потреби в покращенні їх вимірювальних характеристик та сучасний стан теорії та методів проектування чутливих елементів, актуальним вважається узагальнення та покращення математичних моделей руху чутливих елементів, і створення на їх основі ефективних методів розрахунку їх основних вимірювальних характеристик, методів розрахунку конструктивних параметрів чутливих елементів на основі бажаних вимірювальних характеристик, методів реалістичного числового моделювання, методів та алгоритмів компенсації похибок вимірювання кутової швидкості. Крім цього, існує необхідність в створенні методів вибору конструктивних параметрів чутливих елементів, розробці методів і алгоритмів обробки та фільтрації вихідних сигналів як в модульованих, так і в демодульованих сигналах, в методах керування чутливим елементом, які реалізують різні режими роботи гіроскопів.

РОЗДІЛ 2 РІВНЯННЯ РУХУ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ

В цьому розділі отримуються повні та спрощені диференціальні рівняння руху для чутливих елементів найбільш поширених конструкцій коріолісових вібраційних гіроскопів: з поступальним та обертальними первинним і вторинним рухами чутливого елемента, камертонного чутливого елемента та кільцевого або циліндричного. Далі отримані рівняння узагальнюються для того, щоб отримати єдину систему рівнянь руху чутливого елемента, які далі можуть використовуватися для узагальненого аналізу коріолісових вібраційних гіроскопів.

2.1 Рівняння чутливого елемента з поступальним рухом

Чутливий елемент з поступальним рухом використовує поступальний рух як для первинних, так і для вторинних коливань. На нього також зазвичай прийнято посилалися, як на ЛЛ-гіроскоп (лінійний первинний і лінійний вторинний рух). Відомими є рівняння руху для симетричного чутливого елемента ([10], [15], [54]), які не дозволяють проводити аналіз руху чутливого елемента з додатковою рамкою. В них також нехтуються всі прискорення крім прискорення Коріоліса. В цьому розділі ми отримаємо повні рівняння руху із врахуванням додаткової рамки.

Рис. 2.1 подає схематичне представлення структури чутливого елемента, що реалізує поступальний тип кінематики. У найбільш узагальненій формі, чутливий елемент складається з інерційної маси (m_2), додаткової рамки (m_1), та двох наборів пружних елементів («пружин»), які з'єднують маси між собою і з основою. В додаток до цього введемо праву ортогональну і нормалізовану систему координат $OXYZ$, в якій первинні коливання збурюються вздовж осі Y , тоді вторинні коливання з'являються вздовж осі X , і отже третя вісь Z

розглядається як вісь чутливості. Останнє означає, що в ідеальному випадку зовнішнє обертання навколо цієї осі буде відчуватися чутливим елементом.

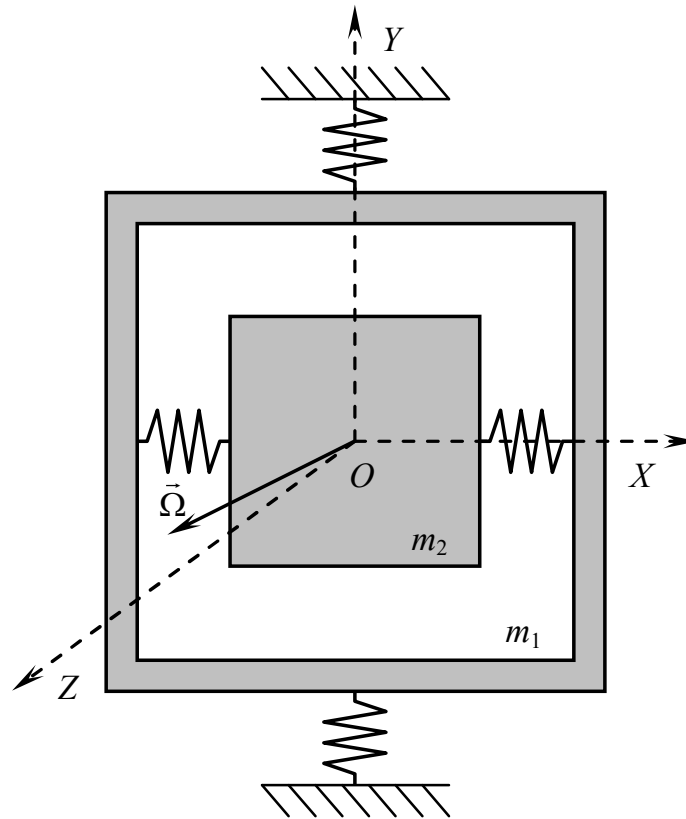


Рис. 2.1. Поступальний чутливий елемент КВГ

Визначимо положення \vec{X}_1 додаткової рамки і положення \vec{X}_2 інерційної маси в системі координат $OXYZ$ як

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= \{0, x_1, 0\}, \\ \vec{X}_2 &= \{x_2, x_1, 0\}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тут x_1 є зміщенням додаткової рамки відносно нерухомої основи, і x_2 є зміщенням інерційної маси відносно додаткової рамки. Надалі нижні індекси 1 і 2 встановлюються для первинних і вторинних рухів чутливого елемента і не повинні плутатися із номером осі.

Заради узагальненості припустимо, що обертання чутливого елемента задане вектором довільної кутової швидкості $\vec{\Omega}$, який визначається його проєкціями у введений вище системі координат таким чином:

$$\vec{\Omega} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}.$$

Для того, щоб вивести рівняння руху чутливого елемента, скористаємося рівняннями Лагранжа наступного вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i. \quad (2.2)$$

Тут $L = E_k - E_p$ є функцією Лагранжа, E_k і E_p - повною кінетичною і потенціальною енергією чутливого елемента, Q_i - узагальненими силами, що діють на чутливий елемент, а нижній індекс i змінюється від 1 для первинного руху до числа розглядуваних вторинних рухів.

Отже для того, щоб використати рівняння Лагранжа (2.2), слід отримати відповідні вирази для кінетичної і потенціальної енергії чутливого елемента.

В найбільш узагальненому випадку, кінетична енергія точки маси m , що рухається, є

$$E_k = \frac{m}{2} (\vec{V} \cdot \vec{V}), \quad (2.3)$$

де \vec{V} є вектором абсолютної швидкості, який може бути вираженим через положення \vec{X} точкової маси і кутову швидкість $\vec{\Omega}$ обертання системи координат наступним чином

$$\vec{V} = \dot{\vec{X}} = \frac{d}{dt} \vec{X} + \vec{\Omega} \times \vec{X}. \quad (2.4)$$

Тут $\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{X} = \{\dot{X}_x, \dot{X}_y, \dot{X}_z\}$ є локальною похідною від вектора \vec{X} в системі

координат, що обертається. Вектори швидкостей для положень (2.1) додаткової рамки та інерційної маси, обчислені із застосуванням (2.4), є

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \{-x_1\Omega_z, \dot{x}_1, x_1\Omega_x\}, \\ \vec{V}_2 &= \{-x_1\Omega_z + \dot{x}_2, x_2\Omega_z + \dot{x}_1, x_1\Omega_x - x_2\Omega_y\}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Відповідні до (2.5) кінетичні енергії первинного і вторинного рухів визначаються за допомогою наступних виразів:

$$\begin{aligned}E_{k1} &= \frac{m_1}{2}[\dot{x}_1^2 + x_1^2(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)], \\ E_{k2} &= \frac{m_2}{2}[(\dot{x}_1 + x_2\Omega_z)^2 + (\dot{x}_2 - x_1\Omega_z)^2 + (x_1\Omega_x - x_2\Omega_y)^2], \\ E_k &= E_{k1} + E_{k2}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Тут E_k є загальною кінетичною енергією чутливого елемента КВГ, обчисленою як сума відповідних кінетичних енергій додаткової рамки та інерційної маси.

Другим членом в функції Лагранжа є повна потенціальна енергія пружин в пружному підвісі чутливого елемента

$$E_p = \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}x_2^2, \quad (2.7)$$

де k_1 є повною жорсткістю пружного підвісу вздовж осі Y (первинний рух), і k_2 є повною жорсткістю в напрямку осі X (вторинний рух).

Об'єднання виразів (2.6) і (2.7) у функцію Лагранжа і використання результату в рівняннях Лагранжа (2.2) дає нам наступну систему двох диференціальних рівнянь, що описують рух чутливого елемента КВГ:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + [k_1 - (m_1 + m_2)(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)]x_1 \\ + m_2((\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega}_z)x_2 + 2\Omega_z\dot{x}_2) = Q_1, \\ m_2\ddot{x}_2 + [k_2 - m_2(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)]x_2 \\ + m_2(-2\Omega_z\dot{x}_1 + (\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)x_1) = Q_2. \end{cases}$$

Ці рівняння можна тепер переписати шляхом ділення обох частин рівнянь на їхні відповідні коефіцієнти біля похідних найвищого порядку ($m_1 + m_2$ для першого рівняння і m_2 - для другого). Результатом є

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_1^2 - \Omega_x^2 - \Omega_z^2)x_1 + 2d\Omega_z\dot{x}_2 + d(\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega}_z)x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + (\omega_2^2 - \Omega_y^2 - \Omega_z^2)x_2 - 2\Omega_z\dot{x}_1 + (\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)x_1 = q_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

де $\omega_1^2 = k_1/(m_1 + m_2)$ і $\omega_2^2 = k_2/m_2$ є квадратами власних частот первинного і вторинного рухів відповідно, $d = m_2/(m_1 + m_2)$ - безрозмірним коефіцієнтом інерційної асиметрії чутливого елемента; $q_1 = Q_1/(m_1 + m_2)$, $q_2 = Q_2/m_2$ - узагальненими прискореннями від різних зовнішніх сил, що діють вздовж відповідних осей.

Рівняння (2.8) описують рух узагальненого КВГ із поступальним чутливим елементом. Відмітимо, що якщо просто припустити, що маса додаткової рамки є нульовою ($m_1 = 0$), тоді $d = 1$, і можна отримати рівняння руху для КВГ з однієї масою без додаткової рамки, що, наприклад, відповідає конструкції з вібруючою балкою.

Остаточню, рівняння (2.8) можуть бути доповнені додаванням членів демпфуючих сил, даючи рівняння руху поступального чутливого елемента

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - \Omega_x^2 - \Omega_z^2)x_1 + 2d\Omega_z\dot{x}_2 + d(\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega}_z)x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - \Omega_y^2 - \Omega_z^2)x_2 - 2\Omega_z\dot{x}_1 + (\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)x_1 = q_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Тут ζ_1 і ζ_2 є безрозмірними коефіцієнтами демпфування, які відповідають первинним і вторинним рухам чутливого елемента.

Рівняння (2.9) містять всі складові вектора кутової швидкості $\vec{\Omega}$, але тільки складова Ω_z присутня як член кутової швидкості першого порядку і отже буде належним чином вимірюватися поступальним КВГ. Давайте тепер припустимо, що кутова швидкість збігається із віссю Z , що означає, що

$$\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}.$$

Це припущення призводить до більш простої форми рівнянь руху, а саме

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2)x_1 = q_1 - 2d\Omega\dot{x}_2 - d\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2)x_2 = q_2 + 2\Omega\dot{x}_1 + \dot{\Omega}x_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Розглядаючи більш детально (2.10), можна побачити, що у випадку ідеального пружного підвісу, де немає перехресного зв'язку між додатковою рамкою та інерційною масою, первинні і вторинні рухи в системі зв'язані тільки за допомогою кутової швидкості Ω . Це означає, що за відсутності будь-яких зовнішніх сил, які впливають на інерційну масу вздовж узагальненої координати x_2 (наприклад, $q_2 = 0$), будь-які вимушені переміщення в цьому напрямку будуть викликатися тільки кутовою швидкістю. В той же самий час, кутова швидкість в рівняннях (2.10) є невідомою і, взагалі кажучи, змінюється з часом. Це означає, що хоча отримана система рівнянь руху чутливого елемента є лінійною, але вона містить невідомі коефіцієнти, що залежать від часу. Зрозуміло, що це є досить складною задачею - знайти повний узагальнений розв'язок такої системи в аналітичній формі. Однак, для того, щоб аналізувати динаміку КВГ і бути спроможними оптимізувати його характеристики, немає необхідності розв'язувати ці рівняння відносно переміщень x_1 і x_2 чутливого елемента.

2.2 Рівняння руху обертального чутливого елемента

На відміну від поступального чутливого елемента, обертальна конструкція використовує обертання як для первинних, так і для вторинних коливань. З цієї причини він часто згадується як ОО-гіроскоп (обертальний первинний і обертальний вторинний рух). Одним із перших гіроскопів, побудованих за таким принципом, був кардановий мікромеханічний гіроскоп ([34], [41]). Спрощені лінеаризовані рівняння для аналізу власних частот та частотних характеристик були отримані в [46], [47]. Повні рівняння були отримані автором в [66].

Подібно до поступального чутливого елемента, рис. 2.2 демонструє кінематику обертального чутливого елемента КВГ.

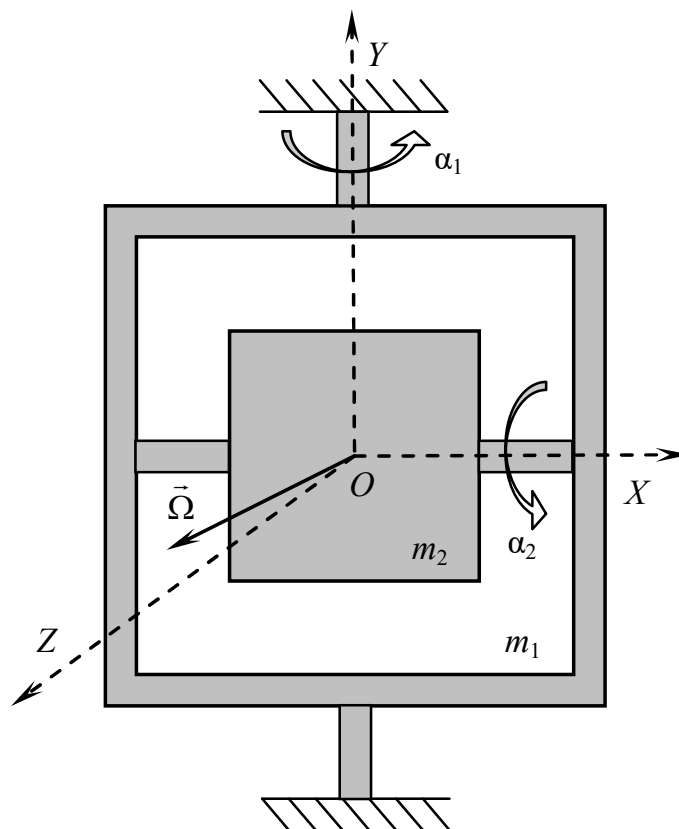


Рис. 2.2. Обертальний чутливий елемент КВГ

Лінійні пружини замінені обертальними пружними торсіонами, і узагальнені координати тепер являють собою кути, а не поступальні переміщення. Тут α_1 відповідає куту між основою і додатковою рамкою, а α_2 відповідає куту між додатковою рамкою і елементом інерційної маси. Ці кути зазвичай називаються кутами Ейлера. Перетворення осей системи координат після кожного з цих обертань (первинного і вторинного) показані на рис. 2.3.

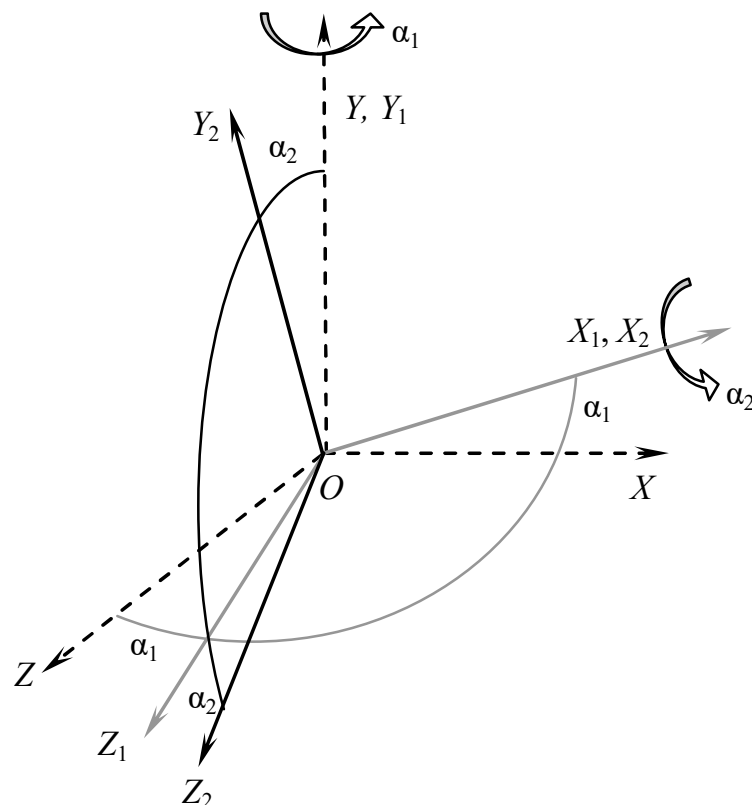


Рис. 2.3. Перетворення осей завдяки первинному і вторинному рухам

Тут система координат $OX_1Y_1Z_1$ є результатом обертання системи координат $OXYZ$ навколо осі Y на кут α_1 , і зв'язана із додатковою рамкою. Подібно до цього, система координат $OX_2Y_2Z_2$ отримана шляхом обертання системи координат $OX_1Y_1Z_1$ на кут α_2 , і зв'язана із чутливим елементом інерційної маси.

Для того, щоб вивести рівняння руху обертального чутливого елемента КВГ, необхідно знову почати з належних виразів для кінетичної і потенціальної енергій.

Відмінність від попереднього випадку полягає в тому, що рух тепер є обертальним, і відповідна кінетична енергія виражається в термінах кутової швидкості замість швидкостей і моментів інерції замість мас:

$$E_k = \frac{I}{2} \Omega^2. \quad (2.11)$$

Тут I є моментом інерції обертального елемента відносно осі, яка збігається з напрямком вектора кутової швидкості $\vec{\Omega}$. Мабуть цей випадок є трохи складнішим у порівнянні з поступальним рухом чутливого елемента КВГ, оскільки власні моменти інерції відносяться до складових кутової швидкості в різних системах координат.

Спочатку вектор зовнішньої кутової швидкості $\vec{\Omega}$ визначається своїми проекціями

$$\vec{\Omega} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$$

в системі координат $OXYZ$. Перетворення його проекцій в системі координат $OX_1Y_1Z_1$, зв'язаної з додатковою рамкою, задається наступними виразами:

$$\begin{aligned} \Omega_{x1} &= \Omega_x \cos \alpha_1 - \Omega_z \sin \alpha_1, \\ \Omega_{y1} &= \Omega_y + \dot{\alpha}_1, \\ \Omega_{z1} &= \Omega_x \sin \alpha_1 + \Omega_z \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подальше перетворення кутової швидкості в системі координат $OX_2Y_2Z_2$, зв'язаної з елементом інерційної маси, виконується таким же чином:

$$\begin{aligned}
\Omega_{x_2} &= \Omega_{x_1} + \dot{\alpha}_2, \\
\Omega_{y_2} &= \Omega_{y_1} \cos \alpha_2 + \Omega_{z_1} \sin \alpha_2 \\
\Omega_{z_2} &= -\Omega_{y_1} \sin \alpha_2 + \Omega_{z_1} \cos \alpha_2.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Кінетична енергія (2.11) може тепер бути виражена у термінах різних проєкцій кутової швидкості (2.12) і (2.13) так

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{1x} \Omega_{x_1}^2 + I_{1y} \Omega_{y_1}^2 + I_{1z} \Omega_{z_1}^2 + I_{2x} \Omega_{x_2}^2 + I_{2y} \Omega_{y_2}^2 + I_{2z} \Omega_{z_2}^2). \tag{2.14}$$

Тут I_{ix} , I_{iy} , I_{iz} є моментами інерції i -го елемента ($i=1$ відповідає додатковій рамці, $i=2$ відповідає елементу інерційної маси) навколо відповідних осей відповідної системи координат.

Потенціальна енергія чутливого елемента подібна до випадку поступальних рухів за винятком кутової жорсткості торсіонів замість пружин:

$$E_p = \frac{k_1}{2} \alpha_1^2 + \frac{k_2}{2} \alpha_2^2. \tag{2.15}$$

Тут k_i є константами кутових пружин пружного підвісу. Підстановка отриманих виразів кінетичної (2.14) та потенціальної (2.15) енергій в рівняння Лагранжа (2.2) призводить до досить великих рівнянь, які важко аналізувати. В той же час ці рівняння є нелінійними через наявність синусоїдальних та косинусоїдальних функцій від узагальнених змінних α_1 і α_2 .

Однак, приймаючи до уваги, що пружні підвіси зазвичай не дозволяють великих кутових відхилень, розумно припустити, що кути α_1 і α_2 є малими. Відтак отримані рівняння руху можуть бути лінеаризовані із застосуванням розкладання в ряд Тейлора, коли

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_i &\approx 1, \\
\sin \alpha_i &\approx \alpha_i,
\end{aligned}$$

що призводить до наступних лінійних, в термінах кутів, рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_{1y} + I_{2y})(\ddot{\alpha}_1 + \dot{\Omega}_y) + [k_1 + (I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z})(\Omega_x^2 - \Omega_z^2)]\alpha_1 \\ + (I_{2x} + I_{2y} - I_{2z})\Omega_z \dot{\alpha}_2 - (I_{2y} - I_{2z})(\Omega_x \Omega_y - \dot{\Omega}_z)\alpha_2 \\ + (I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z})\Omega_x \Omega_z = Q_1, \\ I_{2x}(\ddot{\alpha}_2 + \dot{\Omega}_x) + [k_2 + (I_{2y} - I_{2z})(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)]\alpha_2 \\ - (I_{2x} + I_{2y} - I_{2z})\Omega_z \dot{\alpha}_1 + (I_{2y} - I_{2z})\Omega_x \Omega_y \alpha_1 - I_{2x} \dot{\Omega}_z \alpha_1 \\ - (I_{2y} - I_{2z})\Omega_y \Omega_z = Q_2. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Тут Q_1 і Q_2 є узагальненими моментами, що діють навколо первинних і вторинних обертань. Давайте тепер розділимо обидві частини рівнянь на відповідні коефіцієнти біля старшої похідної:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha}_1 + \dot{\Omega}_y + \left[\frac{k_1}{I_{1y} + I_{2y}} + \frac{I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}} (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) \right] \alpha_1 \\ + \frac{I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}} \Omega_z \dot{\alpha}_2 - \frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}} (\Omega_x \Omega_y - \dot{\Omega}_z) \alpha_2 \\ + \frac{I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}} \Omega_x \Omega_z = \frac{Q_1}{I_{1y} + I_{2y}}, \\ \ddot{\alpha}_2 + \dot{\Omega}_x + \left[\frac{k_2}{I_{2x}} + \frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}} (\Omega_y^2 - \Omega_z^2) \right] \alpha_2 \\ - \frac{I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}} \Omega_z \dot{\alpha}_1 + \frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}} \Omega_x \Omega_y \alpha_1 - \dot{\Omega}_z \alpha_1 \\ - \frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}} \Omega_y \Omega_z = \frac{Q_2}{I_{2x}}. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Наступні нові змінні можна тепер ввести для того, щоб спростити рівняння (2.17):

$$q_1 = Q_1 / (I_{1y} + I_{2y}),$$

$$q_2 = Q_2 / I_{2x}$$

є узагальненими кутовими прискореннями від відповідних зовнішніх моментів,

$$\omega_1^2 = k_1 / (I_{1y} + I_{2y}),$$

$$\omega_2^2 = k_2 / I_{2x}$$

квадратами власних частот первинних і вторинних рухів відповідно,

$$g_1 = (I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}) / (I_{1y} + I_{2y}),$$

$$g_2 = (I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}) / I_{2x}$$

є гіроскопічними коріолісовими коефіцієнтами,

$$d_1 = (I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z}) / (I_{1y} + I_{2y}),$$

$$d_2 = (I_{2y} - I_{2z}) / I_{2x},$$

$$d_3 = (I_{2y} - I_{2z}) / (I_{1y} + I_{2y})$$

є коефіцієнтами, які можна розглядати в якості параметрів конструкції чутливого елемента разом із гіроскопічними коефіцієнтами.

Всі ці коефіцієнти дозволяють переписати рівняння (2.17) наступним чином:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{\alpha}_1 + [\omega_1^2 + d_1(\Omega_x^2 - \Omega_z^2)]\alpha_1 + g_1\Omega_z\dot{\alpha}_2 \\ - d_3(\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)\alpha_2 + d_1\Omega_x\Omega_z + \dot{\Omega}_y = q_1, \\ \ddot{\alpha}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{\alpha}_2 + [\omega_2^2 + d_2(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)]\alpha_2 - g_2\Omega_z\dot{\alpha}_1 \\ + d_2\Omega_x\Omega_y\alpha_1 - \dot{\Omega}_z\alpha_1 - d_2\Omega_y\Omega_z + \dot{\Omega}_x = q_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Тут були також додані демпфуючі члени, які характеризуються безрозмірними коефіцієнтами демпфування ζ_1 і ζ_2 . Остаточо, подібно до випадку поступального чутливого елемента КВГ, будемо припускати, що кутова швидкість збігається з віссю Z (наприклад, $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$). Це дає нам більш просту форму рівнянь (2.18):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{\alpha}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)\alpha_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{\alpha}_2 - d_3\dot{\Omega}\alpha_2, \\ \ddot{\alpha}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{\alpha}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)\alpha_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{\alpha}_1 + \dot{\Omega}\alpha_1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Рівняння руху обертального чутливого елемента КВГ у вигляді (2.19) мають точно таку саму структуру, як і рівняння (2.10) для поступального КВГ. Єдина відмінність є в коефіцієнтах і значенні узагальнених координат, які описують або поступальний або обертальний рух. Цей факт дозволить нам пізніше отримати єдиний набір рівнянь руху чутливого елемента КВГ, що призводить до єдиного аналізу обох типів конструкцій.

2.3 Рівняння руху камертонного чутливого елемента

Вище отримані рівняння руху для чутливих елементів КВГ, які використовують або поступальний або обертальний рух як для первинних, так і для вторинних мод. Давайте тепер перейдемо до конструкції, яка використовує поєднання поступального і обертального рухів, а саме «камертонний» КВГ. Кінематична схема камертонного чутливого елемента показана на рис. 2.4.

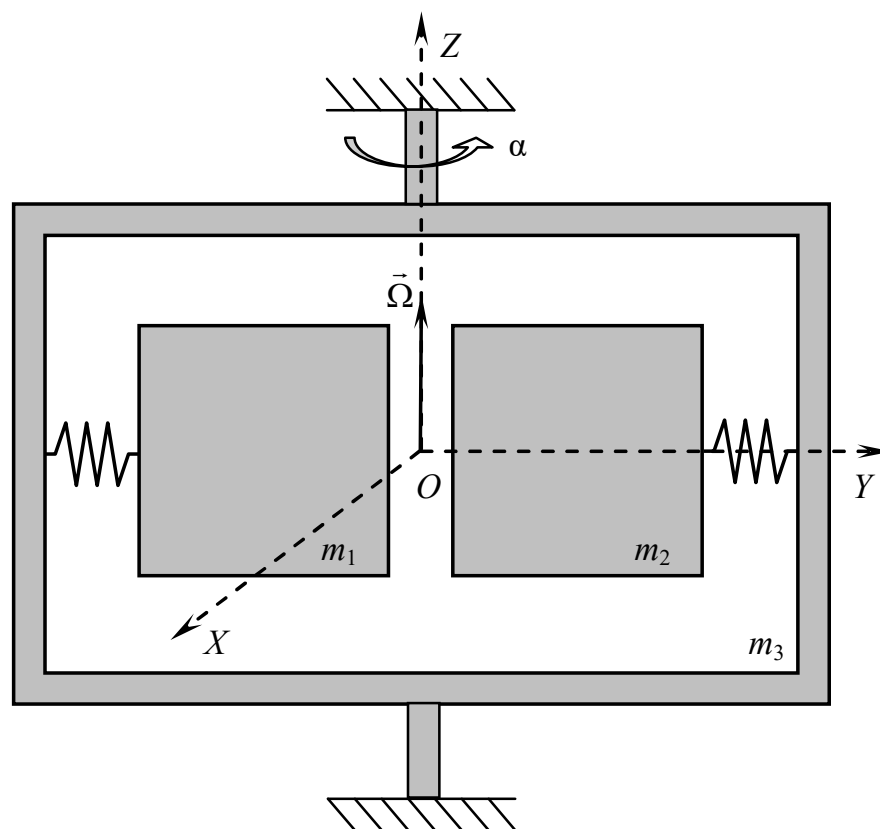


Рис. 2.4. Камертонний чутливий елемент

Камертонний чутливий елемент складається з двох ідентичних інерційних мас m_1 і m_2 , приєднаних із застосуванням лінійних пружин до спільної рамки m_3 , яка приєднується до основи за допомогою пружних торсіонів. Інерційні маси мають змогу рухатися вздовж осі Y , і коли чутливий елемент обертається навколо осі Z , завдяки силі Коріоліса весь чутливий елемент починає обертатися навколо осі Z (кут α). Для простоти також припускається, що зовнішня кутова швидкість ідеально збігається із віссю Z ($\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$).

Положення інерційних мас в системі координат, з'єднаною із спільною рамкою, задається наступними двома векторами:

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= \{0, -r + y_1, 0\}, \\ \vec{X}_2 &= \{0, r + y_2, 0\}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Тут r є постійною відстанню від осі Z до центрів інерційних мас, коли вони не рухаються, і рух описується переміщеннями y_1 і y_2 . Загальна кутова швидкість обертання рамки є

$$\vec{\Omega}_3 = \{0, 0, \Omega + \dot{\alpha}\}.\tag{2.21}$$

Відповідно до (2.20) вектори швидкостей будуть такими:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \{(r - y_1)(\Omega + \dot{\alpha}), \dot{y}_1, 0\}, \\ \vec{V}_2 &= \{-(r + y_2)(\Omega + \dot{\alpha}), \dot{y}_2, 0\}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Повна кінетична енергія чутливого елемента, отримана із застосуванням швидкостей (2.22) для виразу (2.3) (поступальний рух) і кутової швидкості (2.21) для виразу (2.11) (обертальний рух) є

$$\begin{aligned}
E_k = & \frac{m_1}{2} [(r - y_1)^2 (\Omega + \dot{\alpha})^2 + \dot{y}_1^2] \\
& + \frac{m_2}{2} [(r + y_2)^2 (\Omega + \dot{\alpha})^2 + \dot{y}_2^2] \\
& + \frac{I_{3z}}{2} (\Omega + \dot{\alpha})^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Тут I_{3z} є моментом інерції спільної рамки навколо осі Z . Потенціальна енергія пружного підвісу є

$$E_p = \frac{k_1}{2} y_1^2 + \frac{k_2}{2} y_2^2 + \frac{k_3}{2} \alpha^2. \tag{2.24}$$

Остаточно, підстановка енергій (2.23) і (2.24) в рівняння Лагранжа (2.2) дає наступні рівняння руху камертонного чутливого елемента:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 - m_1 \Omega^2) y_1 + 2m_1 r \Omega \dot{\alpha} + m_1 r \Omega^2 = Q_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 - m_2 \Omega^2) y_2 - 2m_2 r \Omega \dot{\alpha} - m_2 r \Omega^2 = Q_2, \\ I_z \ddot{\alpha} + k_3 \alpha - 2r(m_1 \dot{y}_1 - m_2 \dot{y}_2) \Omega - 2r(m_1 y_1 - m_2 y_2) \dot{\Omega} + I_z \dot{\Omega} = Q_3. \end{cases} \tag{2.25}$$

В рівняннях (2.25) коефіцієнт

$$I_z = I_{3z} + (m_1 + m_2) r^2$$

є сумарним моментом інерції чутливого елемента навколо осі Z , Q_i - узагальненими силами для поступальних змінних і моментів для обертальних відповідно. Також відмітимо, що рівняння руху (2.25) є лінійною частиною вихідних рівнянь, отриманих з (2.2).

Давайте тепер розділимо обидві частини рівнянь на відповідні коефіцієнти біля старшої похідної і додамо демпфуючі члени:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2)y_1 + 2r\Omega\dot{\alpha} + r\Omega^2 = q_1, \\ \ddot{y}_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2)y_2 - 2r\Omega\dot{\alpha} - r\Omega^2 = q_2, \\ \ddot{\alpha} + \omega_3^2\alpha - 2\frac{r}{I_z}(m_1\dot{y}_1 - m_2\dot{y}_2)\Omega \\ - 2\frac{r}{I_z}(m_1y_1 - m_2y_2)\dot{\Omega} + \dot{\Omega} = q_3. \end{cases} \quad (2.26)$$

В системі рівнянь (2.26)

$$\omega_1^2 = k_1 / m_1,$$

$$\omega_2^2 = k_2 / m_2,$$

$$\omega_3^2 = k_3 / I_z$$

є квадратами власних частот відповідних рухів;

$$q_1 = Q_1 / m_1,$$

$$q_2 = Q_2 / m_2,$$

$$q_3 = Q_3 / I_z$$

є прискореннями від зовнішніх сил, що діють на відповідні частини чутливого елемента.

Система рівнянь (2.26) може бути далі спрощена, якщо ввести нову змінну

$$y = y_1 - y_2,$$

і інерційні маси разом із їхніми пружними підвісами вважати ідентичними ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$). В результаті, перші два рівняння зводяться до одного, і рівняння руху камертонного чутливого елемента набувають вигляду

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\zeta_y\omega_y\dot{y} + (\omega_y^2 - \Omega^2)y + 2r\Omega(2\dot{\alpha} + \Omega) = q_y, \\ \ddot{\alpha} + 2\zeta_3\omega_3\dot{\alpha} + \omega_3^2\alpha - 2m\frac{r}{I_z}(\Omega\dot{y} + y\dot{\Omega}) + \dot{\Omega} = q_3, \end{cases} \quad (2.27)$$

де $q_y = q_1 - q_2$, $\omega_y^2 = k/m$, ζ_y та ζ_3 є безрозмірними коефіцієнтами демпфування доданих демпфуючих членів.

Аналіз рівнянь руху (2.27) показує, що якщо задані маси налаштовані коливатися з протилежними фазами, тоді кутовий рух чутливого елемента стає залежним від зовнішньої кутової швидкості, що дозволяє її вимірювати.

2.4 Рівняння руху кільцевого чутливого елемента

У той час, коли всі раніше розглянуті конструкції використовують зосереджені маси для того, щоб відчувати прискорення Коріоліса, використовуються також розподілені маси, які забезпечують відмінні характеристики у численних застосуваннях. В якості прикладу конструкції з розподіленими масами, розглянемо чутливий елемент КВГ у формі кільця, показаний на рис. 2.5.

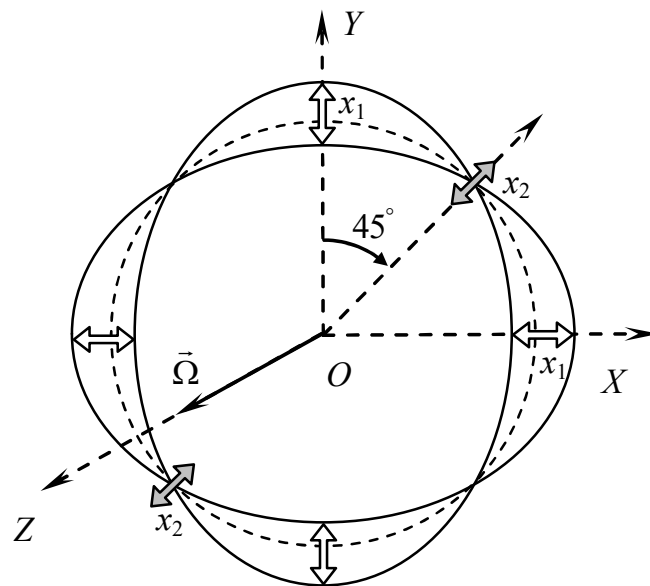


Рис. 2.5. Чутливий елемент КВГ у формі кільця

Чутливий елемент у формі кільця налаштовується на коливання вздовж осей X і Y (первинне переміщення кільця x_1). Ці коливання можуть також

розглядатися як стояча хвиля, збуджена у кільці. Коли немає зовнішнього обертання, прикладеного до чутливого елемента, первинна хвиля має чотири вузли, в яких переміщення кільця є нульовим. Ці вузли розташовані під 45° між осями X і Y .

Коли чутливий елемент обертається навколо осі Z , первинна хвиля починає зсуватися по кільцю через силу Коріоліса. В результаті вторинні коливання (переміщення кільця x_2) починають з'являтися у вузлах, таким чином дозволяючи вимірювання зовнішньої кутової швидкості $\vec{\Omega}$.

Незважаючи на те, що тут немає зосереджених мас у кільцевому чутливому елементі, його рівняння руху в термінах первинного і вторинного переміщень x_1 і x_2 все ще можуть бути записаними у зосередженій формі як

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta\omega\dot{x}_1 + (\omega^2 - \Omega^2)x_1 = q_1 - 2c\Omega\dot{x}_2 - c\Omega x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta\omega\dot{x}_2 + (\omega^2 - \Omega^2)x_2 = q_2 + 2c\Omega\dot{x}_1 + c\Omega x_1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Тут ω є власною частотою кільця, ζ - безрозмірним коефіцієнтом демпфування, Ω є проекцією зовнішньої кутової швидкості на вісь Z , c є гіроскопічним коефіцієнтом зчеплення (коефіцієнтом Брайана (Brian)), q_1 та q_2 є діючими прискореннями від зовнішніх сил, що діють вздовж первинних і вторинних переміщень відповідно. Очевидно, що рівняння руху (2.28) дуже схожі на рівняння поступального чутливого елемента у випадку, коли додаткова рамка відсутня.

2.5 Узагальнені рівняння руху

Не є випадковим те, що рівняння руху всіх розглянутих вище конструкцій чутливих елементів виглядають так схоже, оскільки всі вони базуються на одному й тому ж принципі – вимірюванні прискорення Коріоліса віброуючими структурами. Тим не менш, узагальнення цих рівнянь призводить до ускладнення їх аналізу, у порівнянні із рівняннями конкретних схем, коли

можна використовувати специфічні співвідношення між коефіцієнтами для подальшого спрощення. Узагальнення рівнянь для чутливих елементів з поступальними та обертальними первинними і вторинними рухами були раніше продемонстровані автором в [104] та [118]. Доповнення їх рівняннями роторних вібраційних гіроскопів у випадку сталих первинних коливань було продемонстровано в [125]. В цьому розділі ми об'єднаємо всі отримані раніше рівняння руху чутливих елементів.

Давайте запишемо рівняння руху чутливого елемента КВГ у формі, яка можна використовуватися для аналізу динаміки у всіх розглянутих вище конструкцій:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_3\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\dot{\Omega}x_1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Тут x_1 і x_2 є узагальненими переміщеннями, що описують первинний і вторинний рух чутливого елемента, або поступальний або обертальний; ω_1 та ω_2 є парціальними частотами, ζ_1 і ζ_2 є коефіцієнтами демпфування первинного та вторинного рухів відповідно; q_1 і q_2 - прискореннями (або поступальними або обертальними) від зовнішніх сил/моментів, Ω є зовнішньою кутовою швидкістю, ортогональною до первинного і вторинного рухів. Коефіцієнти, що залишилися, є функціями параметрів конструкції чутливого елемента і наведені у табл. 2.1.

Звернемо увагу, що для того, щоб зробити рівняння руху (2.27) камертона сумісними із узагальненою формою (2.29), деякі члени були вилучені. Тим не менше, ці зміни не роблять узагальнену форму менш застосовною до аналізу камертонного чутливого елемента, оскільки їхній вплив є або мізерно малим, або видаляється демодуляцією вторинних коливань.

Давайте тепер, нарешті, подивимось на найбільш спрощену форму узагальнених рівнянь, коли зовнішня кутова швидкість Ω є малою порівняно із

власною частотою і повільно змінюється, наприклад, $\Omega^2 \approx 0$, $\Omega \approx \text{const}$, та $\dot{\Omega} \approx 0$.

Таблиця 2.1. Коефіцієнти узагальнених рівнянь руху

ЧЕ:	Балочна	ЛЛ-гіроскоп	ОО-гіроскоп	Камертон	Кільце
g_1	2	$\frac{2m_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}}$	$4r$	$2c$
g_2	2	2	$\frac{I_{2x} + I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}}$	$\frac{2mr}{I_z}$	$2c$
d_1	1	1	$\frac{I_{1x} - I_{1z} + I_{2x} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}}$	1	1
d_2	1	1	$\frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{2x}}$	0	1
d_3	1	$\frac{m_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{I_{2y} - I_{2z}}{I_{1y} + I_{2y}}$	0	c
d_4	1	1	1	$\frac{2mr}{I_z}$	c

В результаті отримуємо найбільш широко відому форму рівнянь руху КВГ

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1, \end{cases} \quad (2.30)$$

де присутні тільки коріолісові члени. Хоча система (2.30) є також придатною для опису принципів роботи коріолісових вібраційних гіроскопів, ми будемо використовувати рівняння (2.29) для аналізу руху чутливого елемента, і для розробки алгоритмів обробки сигналів і керування.

Важливо також зазначити, що будь-які результати, які отримано на основі рівнянь (2.29) можуть також бути застосовними до аналізу руху чутливих елементів будь-якої з описаних вище конструкцій.

2.6 Висновки

Таким чином, в цьому розділі було розвинуто та узагальнено рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів різних схем, що дозволяє аналізувати рух та оптимізувати конструкцію їх чутливих елементів. Результати такого аналізу, а також методології проектування на його основі, можуть у повній мірі застосовуватися для будь яких з розглянутих вище типів коріолісових вібраційних гіроскопів.

Треба також зазначити, що не всі можливі типи конструкцій було розглянуто в цьому розділі і зведено до таблиці 2.1. Однак, як було продемонстровано, методологія отримання рівнянь руху чутливих елементів за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду та визначення відповідності їх коефіцієнтів до параметрів узагальненої моделі може бути легко застосована до будь яких типів коріолісових вібраційних гіроскопів. Як тільки відповідні параметри узагальнених рівнянь (2.29) визначено, всі інші результати та методології можуть застосовуватися до конкретного коріолісового вібраційного гіроскопа.

РОЗДІЛ 3 ДИНАМІКА ЧУТЛИВОГО ЕЛЕМЕНТУ

Після того, як в попередній главі були отримані узагальнені рівняння руху чутливого елемента КВГ, наступним кроком буде знаходження розв'язків цих рівнянь. Як вже відмічалось, отримані раніше рівняння не зовсім підходять для отримання повного розв'язку в аналітичній формі в термінах первинних і вторинних координат завдяки присутності невідомої і змінної кутової швидкості в якості коефіцієнта. Однак, за певних припущень і використовуючи факт, що корисна інформація у вібраційних гіроскопах присутня в амплітудах і фазах коливань, все ще можна отримати придатні для аналізу розв'язки.

Аналіз динаміки чутливого елемента на нерухомій основі, або такій, що обертається, буде розглянуто в цьому розділі. Будуть також отримані розв'язки в термінах амплітуд і фаз первинних і вторинних коливань. Крім цього буде представлений аналіз траєкторії руху чутливого елемента. На кінець, буде детально пояснена методологія реалістичного числового моделювання динаміки КВГ.

3.1 Первинний рух чутливого елемента

Інколи більш зручно розглядати визначення кутової швидкості за допомогою коріолісового вібраційного гіроскопа як амплітудну модуляцію. Справді, вихідні вторинні коливання є первинними коливаннями, промодульованими зовнішньою кутовою швидкістю. Це є очевидним із аналізу узагальнених рівнянь руху (2.29). Перше рівняння описує викликані системою збудження первинні коливання, які прикладаються до другого рівняння руху через член коріолісового зв'язку, лінійно зв'язаний із зовнішньою кутовою швидкістю.

Якщо немає зовнішнього обертання ($\Omega = 0$), рівняння руху стають сукупністю двох незалежних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_{10} \sin(\omega t), \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут немає зовнішніх сил у рівнянні вторинного руху, і q_{10} є амплітудою прискорень від системи збудження, ω є частотою збудження. Із рівнянь (3.1) легко бачити, що без зовнішнього обертання вторинні коливання відсутні, і тільки перше рівняння вимагає розв'язання.

Повні розв'язки рівнянь (3.1) в аналітичній формі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-\zeta_1 t} \sin(t\omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2} + \varphi_1) \\ &+ \frac{q_{10}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_1^2\zeta_1^2\omega^2}} \sin(\omega t + \gamma), \\ x_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Фазовий зсув γ у виникаючих первинних коливаннях визначається як

$$\operatorname{tg}(\gamma) = -\frac{2\zeta_1\omega_1\omega}{\omega_1^2 - \omega^2},$$

а константи C_1 і φ_1 визначаються із початкових умов.

Аналіз отриманих розв'язків (3.2) показує, що усталені коливання чутливого елементу КВГ відбуваються з амплітудою, яка є пропорційною силі збудження, після того, як власні коливання зникають через демпфування (див. рис. 3.1).

В той же час інерційна маса залишається нерухомою, і вихідний сигнал від датчика буде нульовим.

Крім того, перехідний час власних коливань буде визначати час запуску КВГ, коли залишаються тільки усталені коливання чутливого елементу і відбуваються з постійною амплітудою

$$A_{10} = \frac{q_{10}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_1^2 \zeta_1^2 \omega^2}}. \quad (3.3)$$

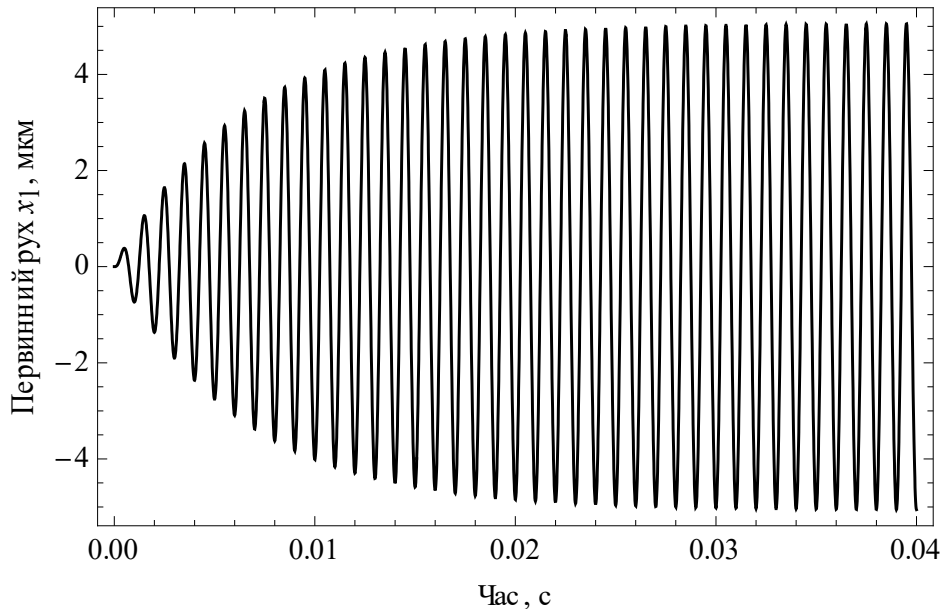


Рис. 3.1. Первинні коливання
($\omega_1=1000$ Гц, $\zeta_1=\zeta_2=0.025$, $\Omega=0$)

Оскільки первинні коливання є носієм, який модулюється зовнішньою кутовою швидкістю, для того, щоб виконати надійні виміри, носій повинен бути стабільним у термінах амплітуди і частоти і його амплітуда повинна бути якомога більшою.

Природним шляхом отримання найбільшої амплітуди первинних коливань є збудження їх в резонансі з їхньою власною частотою

$$\omega = \omega_1 \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (3.4)$$

У випадку резонансу первинна амплітуда (3.3) стає

$$A_{10} = \frac{q_{10}}{2\zeta_1 \omega_1^2 \sqrt{1 - \zeta_1^2}}. \quad (3.5)$$

Аналіз виразу (3.5) показує, що первинна амплітуда є більшою, коли демпфування ζ_1 , як і власна частота ω_1 первинних коливань, є меншими.

3.2 Рух чутливого елемента на основі, що обертається

Розглянувши первинні коливання чутливого елемента і методи їхнього ефективного збудження, перейдемо до вторинних коливань. Вивчаючи розв'язки (3.2), можна побачити, що якщо зовнішня кутова швидкість відсутня, тоді вторинні коливання також відсутні.

Вивчимо тепер поведінку чутливого елемента КВГ на основі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, наприклад $\dot{\Omega} = 0$. Рівняння руху (2.29) набуває трохи спрощеної форми

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1. \end{cases} \quad (3.6)$$

На відміну від послідовності рівнянь (3.1), тут маємо систему рівнянь, які є перехресно зв'язані гіроскопічними членами з кутовою швидкістю. Найбільш важливим є те, що вона стає системою звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Якщо немає зовнішніх сил, що впливають на вторинний рух ($q_2 = 0$), і припускаючи ідеальним пружний підвіс без перехресного зв'язку, вторинний рух буде залежати тільки від кутової швидкості Ω .

Також цікавим є розв'язок системи (3.6) відповідний до вимушених коливань, оскільки він відповідає за вимірювання кутової швидкості, тоді як власний розв'язок описує перехідні процеси.

Якщо збудження первинних коливань є гармонічним, прискорення від збуджуючих сил можна подати у комплексній формі як

$$q_1(t) = \operatorname{Re}\{q_{10} e^{i\omega t}\}. \quad (3.7)$$

Тут ω є частотою збудження, а фаза припускається нульовою. Первинні і вторинні коливання інерційної маси і додаткової рамки будемо шукати як частинний розв'язок системи (3.6) в наступній формі

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{i\omega t}\}, \\ x_2(t) &= \operatorname{Re}\{A_2 e^{i\omega t}\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тут ми шукаємо вимушені коливання, що з'являються із частотою збудження ω , і параметри цих коливань описуються постійними комплексними первинними і вторинними амплітудами A_1 і A_2 у формі

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{10} e^{i\varphi_{10}}, \\ A_2 &= A_{20} e^{i\varphi_{20}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тут A_{10} , A_{20} , φ_{10} , і φ_{20} є постійними дійсними амплітудами і фазами первинних і вторинних коливань відповідно. Підставляючи запропоновані розв'язки (3.8) в рівняння (3.6), отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь відносно комплексних амплітуд замість диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2 + 2\zeta_1\omega_1 i\omega)A_1 + g_1 i\omega\Omega A_2 = q_{10}, \\ (\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2 + 2\zeta_2\omega_2 i\omega)A_2 - g_2 i\omega\Omega A_1 = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Розв'язками системи (3.10) відносно комплексних амплітуд є

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{q_{10}(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2 + 2\zeta_2\omega_2 i\omega)}{\Delta}, \\ A_2 &= \frac{g_2 q_{10} i\omega}{\Delta} \Omega, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де знаменник визначається наступним виразом:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) \\ &\quad - (g_1 g_2 \omega^2 \Omega^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \omega_1 \omega_2 \omega^2) \\ &\quad + 2i\omega[\zeta_1 \omega_1 (\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) + \zeta_2 \omega_2 (\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2)] \end{aligned}$$

Використання метод комплексних амплітуд, який є модифікацією метода усереднення, дає можливість аналізувати амплітуди і фази руху чутливого елемента замість аналізу в термінах його переміщень x_1 і x_2 . Попереднє є дуже цікавим з точки зору детектування кутової швидкості.

Розглядаючи (3.11) можна побачити, що амплітуда вторинних коливань є майже лінійною функцією невідомої кутової швидкості. Однак, амплітуди (3.11) є величинами, що приймають комплексні значення. Перетворення комплексних амплітуд в дійсні амплітуди і фази виконується наступним чином

$$\begin{aligned} A_{i0} &= |A_i| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 A_i + \operatorname{Im}^2 A_i}, \\ \tan \varphi_{i0} &= \frac{\operatorname{Im} A_i}{\operatorname{Re} A_i}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тут нижній індекс $i = 1, 2$ для первинних і вторинних амплітуд і фаз.

Застосування перетворень (3.12) до комплексних амплітуд (3.11) дає

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{q_{10} \sqrt{(\omega_2^2 - d_2 \Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_2^2 \omega_2^2 \omega^2}}{|\Delta|}, \\ A_{20} &= \frac{g_2 q_{10} \omega}{|\Delta|} \Omega, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де

$$\begin{aligned} |\Delta|^2 &= [(\omega_1^2 - d_1 \Omega^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - d_2 \Omega^2 - \omega^2) \\ &\quad - \omega^2 (g_1 g_2 \Omega^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \omega_1 \omega_2)]^2 \\ &\quad + 4\omega^2 [\zeta_1 \omega_1 (\omega_2^2 - d_2 \Omega^2 - \omega^2) + \zeta_2 \omega_2 (\omega_1^2 - d_1 \Omega^2 - \omega^2)]^2. \end{aligned}$$

Дійсні фази первинних і вторинних коливань надаються наступними виразами:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{2\omega [(\omega_2^2 - d_2 \Omega^2 - \omega^2)b_1 + \omega_2 \zeta_2 b_2]}{(\omega_2^2 - d_2 \Omega^2 - \omega^2)b_2 - 4\omega_2 \zeta_2 \omega^2 b_1}, \quad (3.14 \text{ a})$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{(\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) - \omega^2(4\zeta_1\zeta_2\omega_1\omega_2 + g_1g_2\Omega^2)}{2\omega[\omega_1\zeta_1(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) + \omega_2\zeta_2(\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2)]}, \quad (3.14 \text{ б})$$

де

$$b_1 = \omega_1\zeta_1(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) + \omega_2\zeta_2(\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2),$$

$$b_2 = (\omega_1^2 - d_1\Omega^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - d_2\Omega^2 - \omega^2) - \omega^2(4\zeta_1\zeta_2\omega_1\omega_2 + g_1g_2\Omega^2).$$

Використовуючи формули (3.13) і (3.14), можна тепер дослідити, як чутливий елемент КВГ реагує на зовнішню кутову швидкість і як її можна виміряти із найбільшою можливою ефективністю.

Залежність амплітуди вторинних коливань A_{20} (або вторинної амплітуди) як функції від частоти збудження ω показана на рис. 3.2.

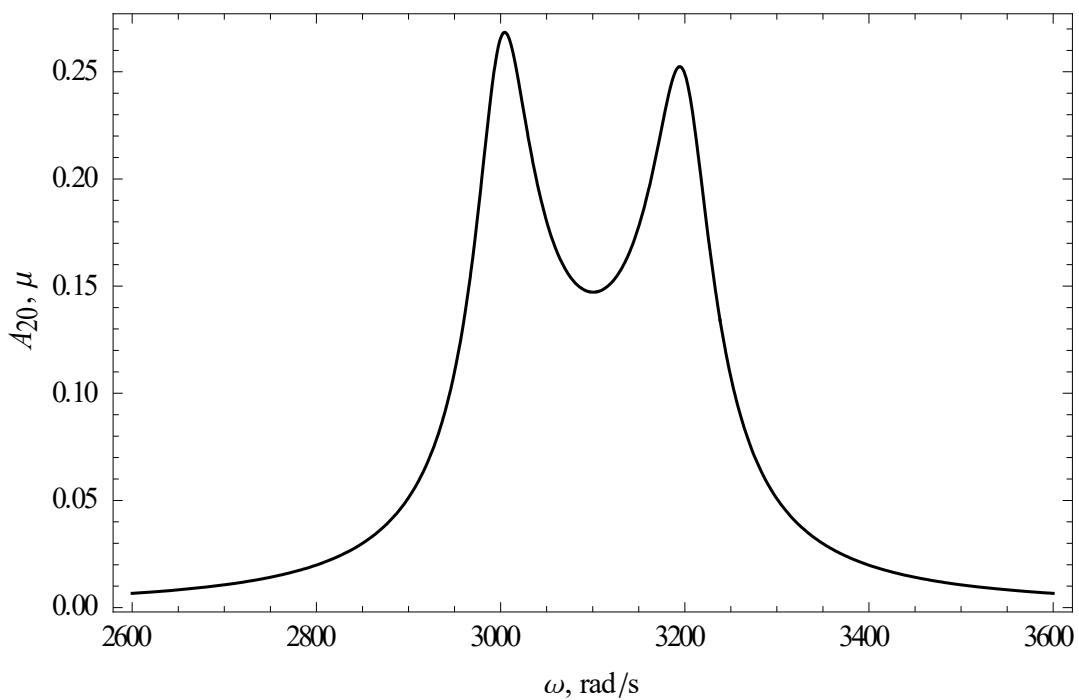


Рис. 3.2. Вторинна амплітуда як функція від частоти збудження
($\omega_1=3000$, $\omega_2=3200$, $\zeta_1=\zeta_2=0.01$, $\Omega=1$)

Очевидно, що максимальний відгук на постійну кутову швидкість досягається, коли з'являється резонанс із нижчою власною частотою. В той же час, чим нижче демпфування, тим вищими є піки вторинної амплітуди.

Як це стає очевидним з (3.13) і (3.14), характеристики КВГ, що мають відношення до амплітуди, дуже залежать від таких параметрів його чутливого елемента, як власні частоти і коефіцієнти демпфування, а також коефіцієнти d_i , що залежать від конструкції чутливого елемента. Для того, щоб зробити аналіз руху чутливого елемента КВГ більш інтуїтивним, введемо такі нові змінні:

$$k = \omega_1$$

є парціальною частотою первинного руху,

$$\delta k = \omega_2 / \omega_1$$

є відносною парціальною частотою вторинного руху,

$$\delta \omega = \omega / k$$

є відносною частотою збудження,

$$\delta \Omega = \Omega / k$$

є відносна кутова швидкість, яка є явно меншою порівняно із первинною парціальною частотою ($\Omega \ll k, \delta \Omega \ll 1$). В термінах цих нових змінних, вирази (3.13) для первинної та вторинної амплітуд можуть бути переписані так

$$A_{10} = \frac{q_{10} k^2 \sqrt{(\delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2)^2 + 4 \zeta_2^2 \delta k^2 \delta \omega^2}}{|\Delta|},$$

$$A_{20} = \frac{g_2 q_{10} \delta \omega}{|\Delta|} \delta \Omega,$$
(3.15)

і піднесений в квадрат знаменник є

$$\begin{aligned}
|\Delta|^2 = & k^8 [(1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)(\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) \\
& - \delta\omega^2 (g_1 g_2 \delta\Omega^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \delta k)]^2 \\
& + 4k^8 \delta\omega^2 [\zeta_1 (\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) + \zeta_2 \delta k (1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)]^2.
\end{aligned}$$

Вирази (3.15) можна і далі спростити, якщо припустити малою відносною кутовою швидкістю, тобто $\delta\Omega \ll 1$ і $\delta\Omega^2 \approx 0$:

$$\begin{aligned}
A_{10} & \approx \frac{q_{10}}{k^2 \sqrt{(1 - \delta\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2 \delta\omega^2}}, \\
A_{20} & \approx \frac{g_2 q_{10} \delta\omega}{k^2 \sqrt{(\delta k^2 - \delta\omega^2)^2 + 4\zeta_2^2 \delta k^2 \delta\omega^2} \sqrt{(1 - \delta\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2 \delta\omega^2}} \delta\Omega \quad (3.16) \\
& \approx \frac{g_2 A_{10} \delta\omega}{\sqrt{(\delta k^2 - \delta\omega^2)^2 + 4\zeta_2^2 \delta k^2 \delta\omega^2}} \delta\Omega.
\end{aligned}$$

Вирази для фаз (3.14) також можна переписати у термінах відносних параметрів чутливого елемента. У випадку малої відносної кутової швидкості вони стають

$$\begin{aligned}
\text{tg}(\varphi_1) & = \frac{2\delta\omega\zeta_1}{1 - \delta\omega}, \\
\text{tg}(\varphi_2) & = \frac{\delta k^2 - (1 + 4\zeta_1 \zeta_2 \delta k + \delta k^2) \delta\omega^2 + \delta\omega^4}{2\delta k \delta\omega (\zeta_2 + \zeta_1 \delta k) - 2\delta\omega^3 (\zeta_1 + \zeta_2 \delta k)}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Вирази (3.16) і (3.17) дозволяють проаналізувати рух чутливого елемента КВГ за наявності зовнішнього обертання, використовуючи безрозмірні параметри, що дає певний рівень узагальнення отриманих результатів.

Іншим важливим аспектом аналізу рівняння руху є характеристичне рівняння, яке дає власні частоти чутливого елемента. Для того, щоб отримати характеристичне рівняння, використовується диференціальний оператор $s = d/dt$ для перетворення рівнянь руху (3.6) в наступну форму:

$$\begin{cases} s^2 x_1 + 2\zeta_1 \omega_1 s x_1 + (\omega_1^2 - d_1 \Omega^2) x_1 = q_1 - g_1 \Omega s x_2, \\ s^2 x_2 + 2\zeta_2 \omega_2 s x_2 + (\omega_2^2 - d_2 \Omega^2) x_2 = q_2 + g_2 \Omega s x_1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Ці трансформовані рівняння можна тоді переписати у матричній формі так

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

де A є головною матрицею даної системи, що визначається членами рівнянь (3.18) як

$$A = \begin{bmatrix} s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2 - d_1\Omega^2 & g_1\Omega s \\ -g_2\Omega s & s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2 - d_2\Omega^2 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Характеристичне рівняння визначається як

$$\det A = 0. \quad (3.22)$$

Підстановка виразу (3.21) в рівняння (3.22) породжує таке характеристичне рівняння:

$$s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0. \quad (3.23)$$

де коефіцієнти a_j є

$$\begin{aligned} a_3 &= 2s^3(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2), \\ a_2 &= s^2(\omega_1^2 - d_1\Omega^2 + \omega_2^2 - d_2\Omega^2 + 4\zeta_1\omega_1\zeta_2\omega_2 + g_1g_2\Omega^2), \\ a_1 &= 2s[\zeta_1\omega_1(\omega_2^2 - d_2\Omega^2) + \zeta_2\omega_2(\omega_1^2 - d_1\Omega^2)], \\ a_0 &= (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)(\omega_2^2 - d_2\Omega^2). \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння (3.23) дозволяє аналізувати стійкість коливань чутливого елемента шляхом використання критерію Рауса-Гурвиця:

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_3^2a_0 &> 0, \\ a_j &> 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння (3.23) є функціями кутової швидкості, коефіцієнтів демпфування і власних частот системи, і тільки кутова

швидкість ϵ невідомою. Всі інші параметри піддаються конструюванню у відповідності до умов стійкості (3.24). Аналізуючи коефіцієнти (3.23) можна знайти, що сталі вторинні коливання з'являються, коли зовнішня кутова швидкість ϵ меншою, ніж власна частота первинних коливань:

$$-\omega_1 < \Omega < \omega_1. \quad (3.25)$$

Співвідношення (3.25) зазвичай задовольняється, оскільки зовнішня кутова швидкість ϵ набагато меншою, ніж власна частота первинних коливань.

Розв'язання в аналітичній формі повного рівняння (3.23) четвертого порядку є досить складним і отже марним для наступного аналізу. Проте, якщо демпфування не береться до уваги ($\zeta_1 = \zeta_2 = 0$), тоді всі члени непарного порядку зникатимуть, і характеристичне рівняння (3.23) стає бікватратним, і може бути переписане із використанням введених раніше безрозмірних змінних наступним чином:

$$\begin{aligned} s^4 + s^2 k^2 (1 - d_1 \delta \Omega^2 + \delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2 + g_1 g_2 \delta \Omega^2) \\ + k^4 (1 - d_1 \delta \Omega^2)(\delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Корені рівняння (3.26) пов'язані з відносними власними частотами $\delta \omega_{j_0}$ первинних і вторинних коливань наступним чином:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \pm ik \delta \omega_{10}, \\ s_{3,4} &= \pm ik \delta \omega_{20}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Розв'язання рівняння (3.26) призводить до наступних виразів для власних частот:

$$\begin{aligned} \delta \omega_{j_0}^2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \delta k^2 - (d_1 + d_2 - g_1 g_2) \delta \Omega^2 \right] \\ &+ \frac{(-1)^j}{2} \left\{ 4(\delta k^2 - d_1 \delta \Omega^2)(d_2 \delta \Omega^2 - 1) \right. \\ &\left. + \left[1 + \delta k^2 - (d_1 + d_2 - g_1 g_2) \delta \Omega^2 \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Графік частот (3.28) як функцій зовнішньої кутової швидкості показано на рис. 3.3, де відносна парціальна частота $\delta k = 1.05$.

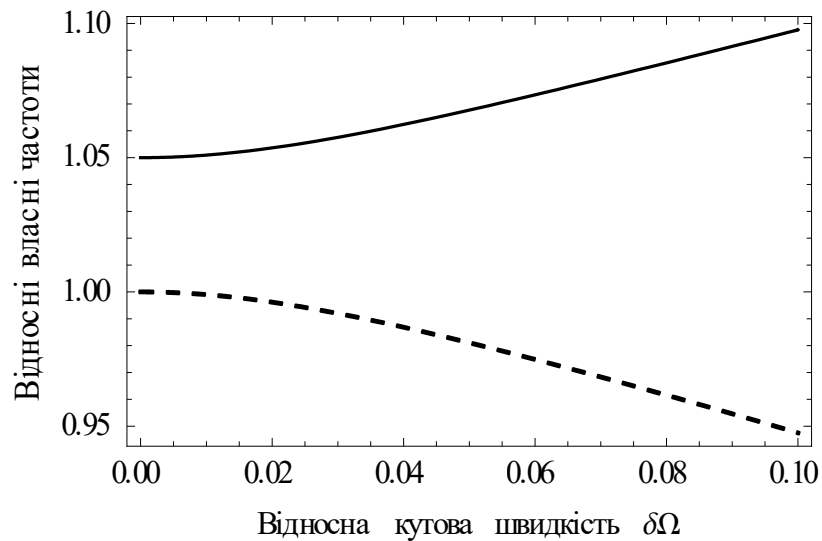


Рис. 3.3. Відносні власні частоти
(пунктиром - первинні, суцільною - вторинні)

Коли немає зовнішнього обертання, власні частоти стають рівними відповідним парціальним частотам. Коли з'являється зовнішнє обертання, ці частоти починають зсуватися завдяки кутовій швидкості.

Хоча ця залежність не здається лінійною, вона стає дуже близькою до лінійної, коли парціальні частоти є рівними ($\delta k = 1$). Графік залежності власних частот від кутової швидкості для цього випадку показано на рис. 3.4.

Така частотна модуляція могла б розглядатися як додатковою до амплітудної модуляції, що демонструється (3.15) і використовується для покращення вимірювань кутової швидкості.

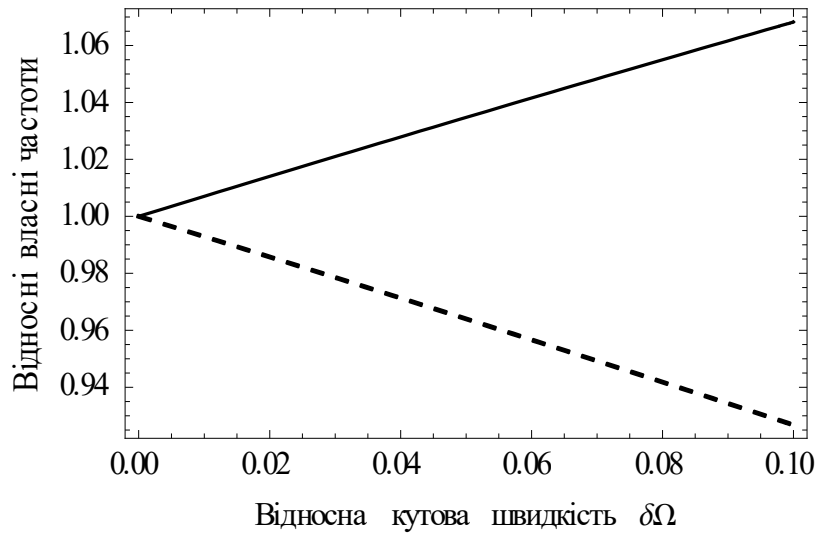


Рис. 3.4. Відносні власні частоти при $\delta k = 1$
(пунктиром - первинні, суцільною - вторинні)

3.3 Моделювання фазової траєкторії руху інерційної маси

Можна розглядати чутливий елемент КВГ як дворозмірний маятник. За наявності постійної зовнішньої кутової швидкості, траєкторія його центра мас формує еліпс, як показано на рис. 3.5.

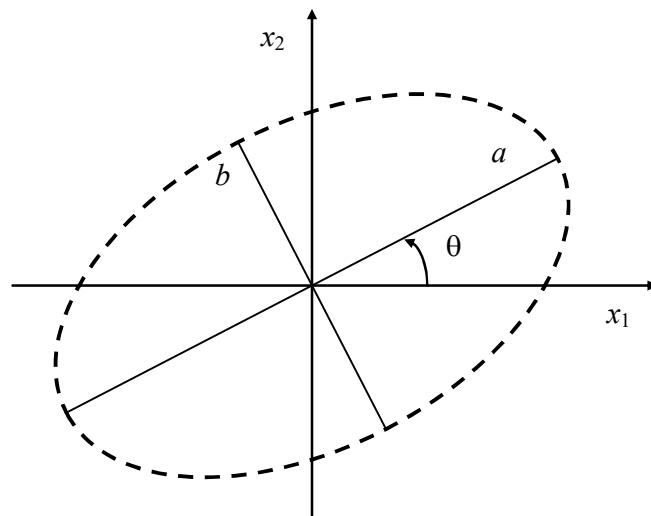


Рис. 3.5. Фазова траєкторія руху центра мас чутливого елемента

На цьому рисунку a і b є великою і малою півосями еліпса, θ є кутом обертання еліпса по відношенню до осей первинних (x_1) і вторинних (x_2) коливань. Є добре відомим, що ці параметри (а саме півосі і кут обертання) залежать від амплітуд і фаз первинних і вторинних коливань, які в свою чергу залежать від параметрів конструкції чутливого елемента і невідомої кутової швидкості.

Проблема, яка розв'язується в цьому підрозділі, є розробка і аналіз математичної моделі параметрів еліпса як функцій конструкції чутливого елемента і його параметрів.

Без втрати загальності, первинні і вторинні координати чутливого елемента КВГ в його усталеному русі можуть бути подані як

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_{10} \cos \omega t, \\ x_2(t) &= A_{20} \cos(\omega t + \varphi) = A_{20} [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi], \end{aligned} \quad (3.29)$$

де A_{10} і A_{20} є первинною і вторинною амплітудами, φ є фазовим зсувом між первинними і вторинними коливаннями, ω є круговою частотою коливань.

Перш за все слід виключити члени, що містять фазу ωt коливань, з рівнянь (3.29). Для того, щоб досягти цього, виразимо синус і косинус від ωt із першого рівняння і підставимо їх у друге, що дає

$$\frac{x_1}{A_{10}} \cos \varphi - \frac{x_2}{A_{20}} = \pm \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A_{10}^2}} \sin \varphi. \quad (3.30)$$

Підносячи у квадрат обидві сторони рівняння (3.30), маємо

$$\frac{x_1^2}{A_{10}^2} + \frac{x_2^2}{A_{20}^2} - \frac{2x_1x_2 \cos \varphi}{A_{10}A_{20}} = \sin^2 \varphi. \quad (3.31)$$

Вважаючи X_1 та X_2 фазовими координатами руху чутливого елемента у системі координат, що обертається на кут θ , легко встановити їхній зв'язок із вихідними координатами

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta, \\ x_2 &= X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

У термінах цих координат рівняння еліпса має свою традиційну форму

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1.$$

Підстановка (3.32) в (3.31) призводить до виразу

$$\begin{aligned} & X_1^2 \frac{A_{20}^2 \cos^2 \theta - A_{10} A_{20} \cos \varphi \sin 2\theta + A_{10}^2 \sin^2 \theta}{A_{10}^2 A_{20}^2} \\ & + X_1 X_2 \frac{(A_{10}^2 - A_{20}^2) \sin 2\theta - 2 A_{10} A_{20} \cos \varphi \cos 2\theta}{A_{10}^2 A_{20}^2} \\ & + X_2^2 \frac{A_{10}^2 \cos^2 \theta + A_{10} A_{20} \cos \varphi \sin 2\theta + A_{20}^2 \sin^2 \theta}{A_{10}^2 A_{20}^2} = \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Безсумнівно, для того, щоб трансформувати рівняння (3.33) в традиційну форму, другий член повинен зникнути. Це відбувається, якщо θ задовольняє наступній умові

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2 A_{10} A_{20} \cos \varphi}{A_{10}^2 - A_{20}^2}. \quad (3.34)$$

Якщо кут θ визначається за (3.34), тоді півосі еліпса будуть задаватися такими виразами:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A_{10} A_{20} \sin \varphi}{\sqrt{A_{20}^2 \cos^2 \theta - A_{10} A_{20} \cos \varphi \sin 2\theta + A_{10}^2 \sin^2 \theta}}, \\ b &= \frac{A_{10} A_{20} \sin \varphi}{\sqrt{A_{10}^2 \cos^2 \theta + A_{10} A_{20} \cos \varphi \sin 2\theta + A_{20}^2 \sin^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тепер слід виразити півосі a і b еліпса, і його кут обертання θ в термінах параметрів чутливого елемента і зовнішньої кутової швидкості.

У ідеально настроєному КВГ, де первинні і вторинні парціальні частоти повністю співпадають, фазовий зсув є нульовим ($\varphi = 0$). Це дозволяє нам наближати вирази (3.34) і (3.35) лінійними членами їхнього представлення рядами Тейлора навколо нульового фазового зсуву:

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{A_{10} A_{20} \varphi}{A_{20} \cos \theta - A_{10} \sin \theta}, \\ b &\approx \frac{A_{10} A_{20} \varphi}{A_{10} \cos \theta + A_{20} \sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Можна відмітити, що в наближеннях (3.36) нульовий фазовий зсув матиме результатом нульову більшу піввісь a , що очевидно є неприйнятним в застосуваннях аналізу траєкторії. Зосередимо більш прискіпливий погляд на залежностях (3.35) для еліптичної траєкторії чутливого елемента КВГ. Ясно, що вираз для більшої півосі має особливості в околиці нульового фазового зсуву, коли знаменник формули може стати нульовим. Однак, далеко від нульової фази ця функція є доволі гладка і не має таких особливостей. Виходячи з детального аналізу цієї залежності пропонується наступна проста апроксимація:

$$a \approx A_{10} + \frac{A_{20}^2}{4} (1 + \cos 2\varphi). \quad (3.37)$$

Безрозмірна відносна похибка апроксимації (3.37) показана на рис. 3.6.

Особливості, які спостерігаються за нульового фазового зсуву на рис. 3.6, демонструють, що наближення (3.37) краще описує більшу на піввісь траєкторії центру мас чутливого елемента, ніж початкова формула (3.36). Легко бачити, що апроксимація (3.37) безперечно достатньо точна для малих фазових зсувів і малих відносних вторинних амплітуд, що є типовим для рухів чутливого елемента КВГ.

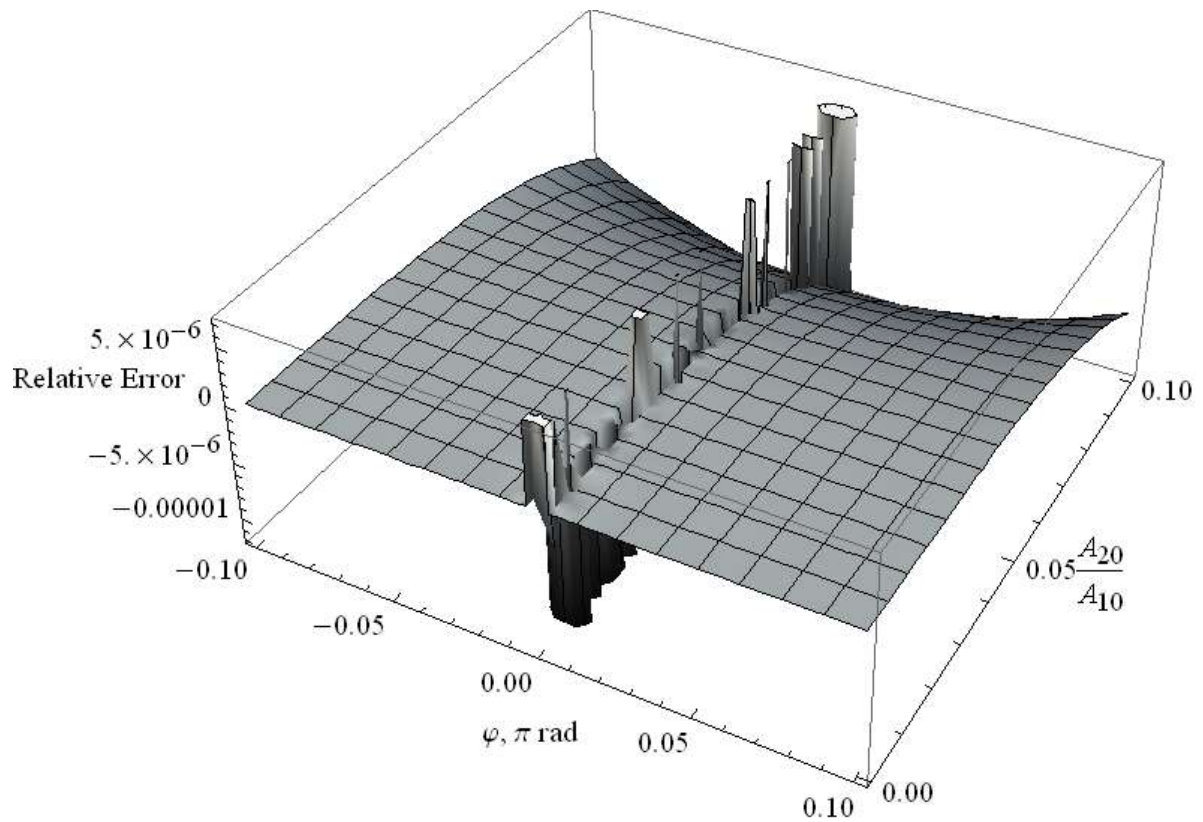


Рис. 3.6. Відносна помилка апроксимації більшої півосі

Давайте тепер проаналізуємо, як залежать параметри еліптичної траєкторії від зовнішньої кутової швидкості і характеристик чутливого елемента.

Можна помітити, що параметри траєкторії чутливого елемента залежать від фазового зсуву $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ між первинними і вторинними фазами. Більш важливо, базуючись на (3.17), фази не залежать від кутової швидкості.

У випадку збудження у первинному резонансі ($\delta\omega = 1$) синус і косинус цього фазового зсуву можна обчислити так

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{1 - \delta k^2}{R}, \\ \cos \varphi &= \frac{2\zeta_2 \delta k}{R}, \\ R &= \sqrt{\delta k^4 - 2(1 - 2\zeta_2^2)\delta k^2 + 1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Вирази (3.16) і (3.17) разом із представленнями (3.38) фазового зсуву, можуть тепер бути використаними для аналізу параметрів дійсної траєкторії чутливого елемента КВГ.

Давайте тепер підставимо вирази (3.16) і (3.36) в формулу для апроксимації (3.37) більшої півосі:

$$a = \frac{q_{10}(4k^2 R^2 \zeta_1 + g_2^2 q_{10} \delta\Omega^2)}{8k^4 R^2 \zeta_1^2}.$$

Пам'ятаючи, що відносна кутова швидкість є малою ($\delta\Omega^2 \approx 0$), більша піввісь, як і очікувалось, стає первинною амплітудою:

$$a \approx \frac{q_{10}}{2k^2 \zeta_1} = A_{10} \Big|_{\delta\omega=1}. \quad (3.39)$$

Менша піввісь траєкторії чутливого елемента після підстановки є

$$b = \frac{q_{10} g_2 (1 - \delta k^2)}{\sqrt{2k^2 R \zeta_1} \sqrt{R^2 + g_2^2 \delta\Omega^2} + \sqrt{R^4 - 2g_2^2 (R^2 - 8\zeta_2^2 \delta k^2) \delta\Omega^2 + g_2^4 \delta\Omega^4}} \delta\Omega,$$

і, упускаючи вищі степені кутової швидкості, матимемо

$$b = \frac{q_{10} g_2 (1 - \delta k^2)}{2k^2 \zeta_1 [1 - 2(1 - 2\zeta_2^2) \delta k^2 + \delta k^4]} \delta\Omega. \quad (3.40)$$

При аналізі формули (3.40) стає явним, що мала піввісь відсутня в кожному з двох випадків: ідеального збігу власних частот ($\delta k = 1$), або відсутності зовнішньої кутової швидкості ($\delta\Omega = 0$).

На кінець, останнє але важливе, кут обертання траєкторії θ може бути обчислений із використанням наступного виразу:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{4g_2 \zeta_2 \delta k \delta\Omega}{1 - 2(1 - 2\zeta_2^2) \delta k^2 + \delta k^4} \right]. \quad (3.41)$$

Залежність кута обертання траєкторії від кутової швидкості та відношення парціальних частот показано на рис. 3.7.

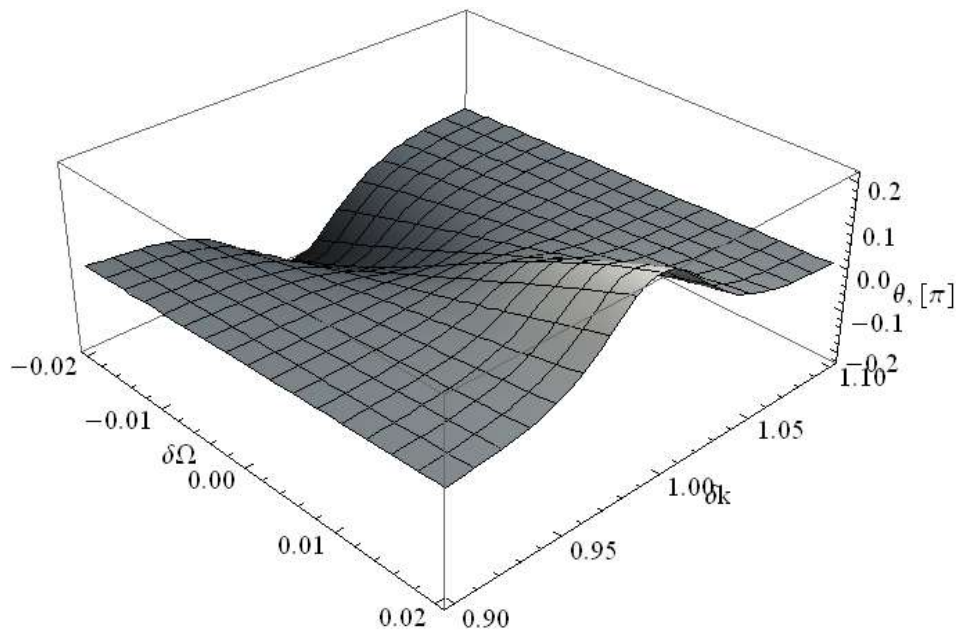


Рис. 3.7. Кут обертання траєкторії як функція кутової швидкості та відношення парціальних частот

Подібно до попереднього випадку, можна лінійно апроксимувати формулу (3.41) для малих кутових швидкостей:

$$\theta \approx \frac{2g_2 \zeta_2 \delta k}{1 - 2(1 - 2\zeta_2^2)\delta k^2 + \delta k^4} \delta \Omega. \quad (3.42)$$

Або, у випадку ідеального збігу первинних і вторинних власних частот ($\delta k = 1$), (3.42) стає

$$\theta \approx \frac{g_2}{2\zeta_2} \delta \Omega. \quad (3.43)$$

Як точний вираз (3.41), так і його лінійна апроксимація (3.43) показані нижче на рис. 3.8.

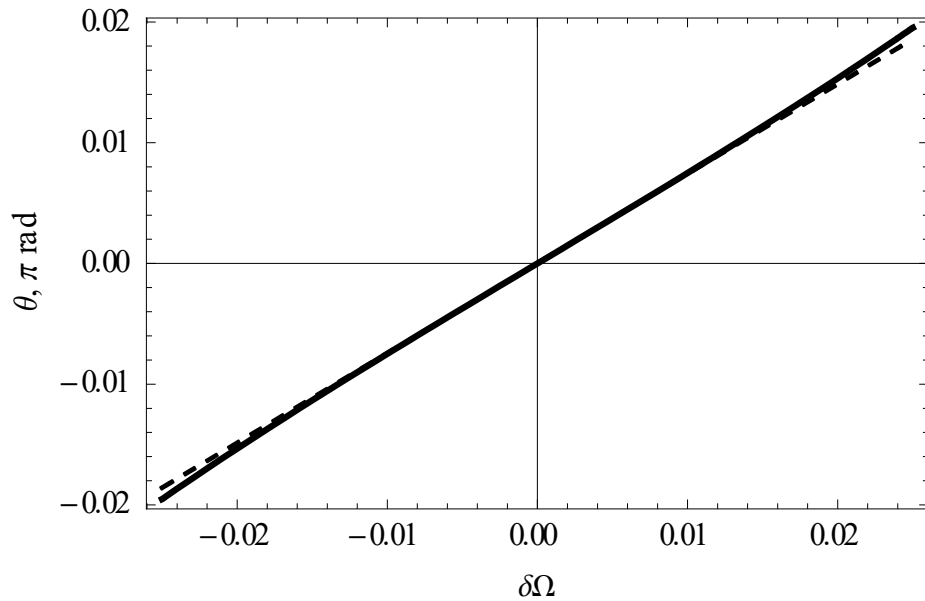


Рис. 3.8. Кут обертання траєкторії як функція кутової швидкості
(суцільна – точний, пунктир – лінійна апроксимація)

Із графіків на рис. 3.7 і 3.8 можна побачити, що кут обертання траєкторії є майже лінійною функцією невідомої кутової швидкості, що дозволяє використовувати його для вимірювання кутової швидкості.

Рис. 3.9 демонструє, яким чином апроксимації траєкторії (3.39), (3.40) і (3.43) відносяться до реалістично змодельованої траєкторії, базуючись на числовому розв'язанні вихідних рівнянь руху.

Тут суцільна лінія демонструє траєкторію усталеного руху змодельованого чутливого елемента КВГ, а пунктирна лінія відповідає траєкторії, генерованій за отриманими параметрами траєкторії (Primary - первинні, Secondary - вторинні коливання відповідно). Всі значення по вісях у мікрометрах.

Порівняння із результатами числового моделювання демонструє високу точність отриманої математичної моделі траєкторії руху чутливого елемента.

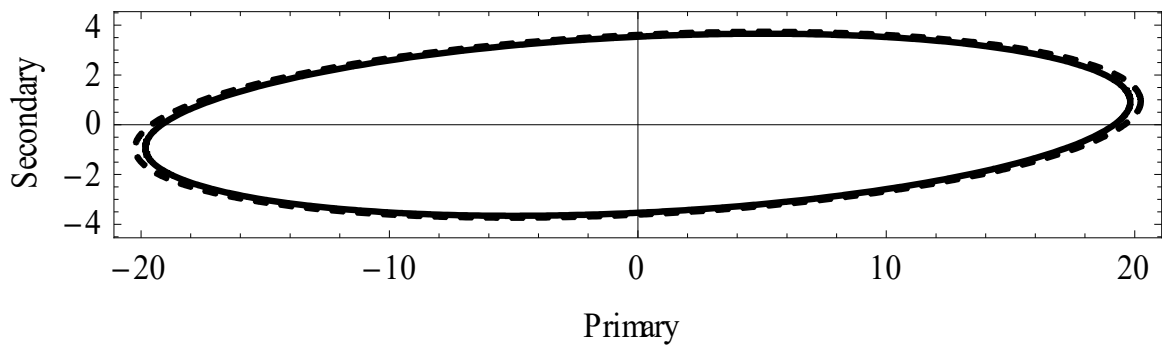


Рис. 3.9. Числове моделювання траєкторії КВГ
(суцільна – модельована, пунктир – теоретична)

Ці залежності дозволяють не тільки подальший аналіз руху чутливого елемента, але й також ефективний синтез багатьох різних керуючих петель, що покращують якість всього КВГ.

3.4 Числове моделювання динаміки КВГ

Точне числове моделювання КВГ на основі повної математичної моделі руху його чутливого елемента є суттєвим для правильної перевірки розроблених спрощених математичних моделей. Узагальнена Simulink-модель для моделювання КВГ в розімкнутому режимі роботи представлена на рис. 3.10.

Тут блок "Angular Rate" («Кутова швидкість») задає кутову швидкість в якості входу до системи, блок "Excitation" («Збудження») видає синусоїдальний сигнал на вхід первинних коливачів, "Process Noise" («Шум процесу») може бути доданий до входу вторинного режиму, а "Sensor Noise" («Шум датчика») можна додати до виходу КВГ. Вторинна координата x_2 повинна бути демодульованою "Secondary Detector" («Вторинний детектор») для усунення первинного несучого сигналу.

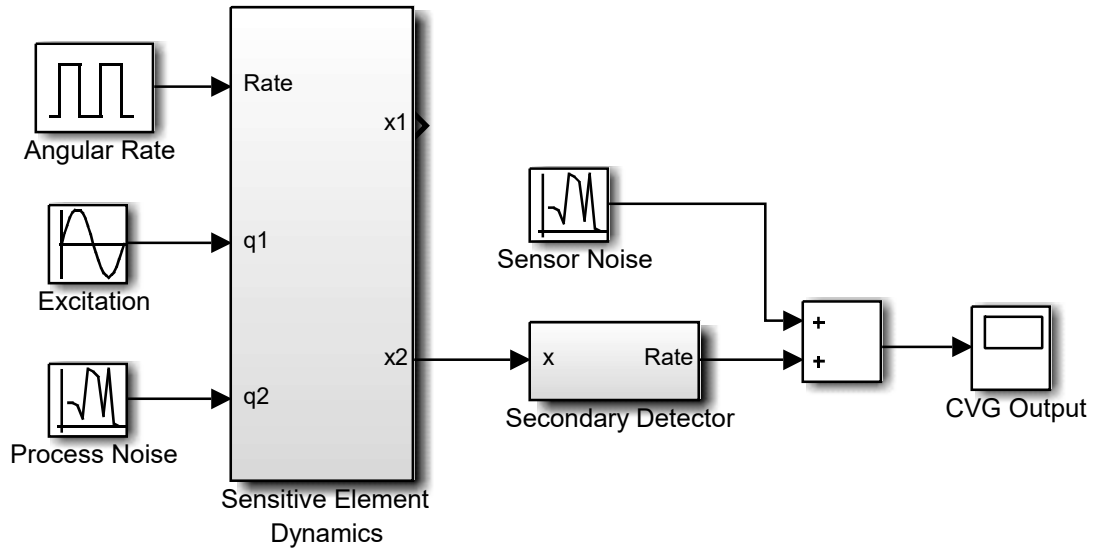


Рис. 3.10. Схема числового моделювання КВГ

Для того, щоб зробити результати моделювання якомога реалістичнішими, будуть використовуватися наступні найбільш узагальнені рівняння руху чутливого елемента (2.29), спрощені для малих кутових швидкостей ($\Omega^2 \approx 0$):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_3\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\dot{\Omega}x_1. \end{cases} \quad (3.44)$$

Відповідна модель для моделювання (наповнення підсистемного блоку "Sensitive Element Dynamics" - «Динаміка чутливого елемента» на рис. 3.10) показана на рис. 3.11.

Первинна і вторинна динаміка в цій моделі моделюється із застосуванням блоку передатної функції "Transfer Fcn" («Передатна функція») із Simulink. Параметри чутливого елемента замінюються наступними змінними: $k1 = \omega_1$, $k2 = \omega_2$, $h1 = \zeta_1$, $h2 = \zeta_2$, і так далі.

Демодуляція вторинного виходу виконується синхронним демодулятором (блок "Secondary Detector" – «Вторинний детектор» на рис. 3.10), показаним на рис. 3.12.

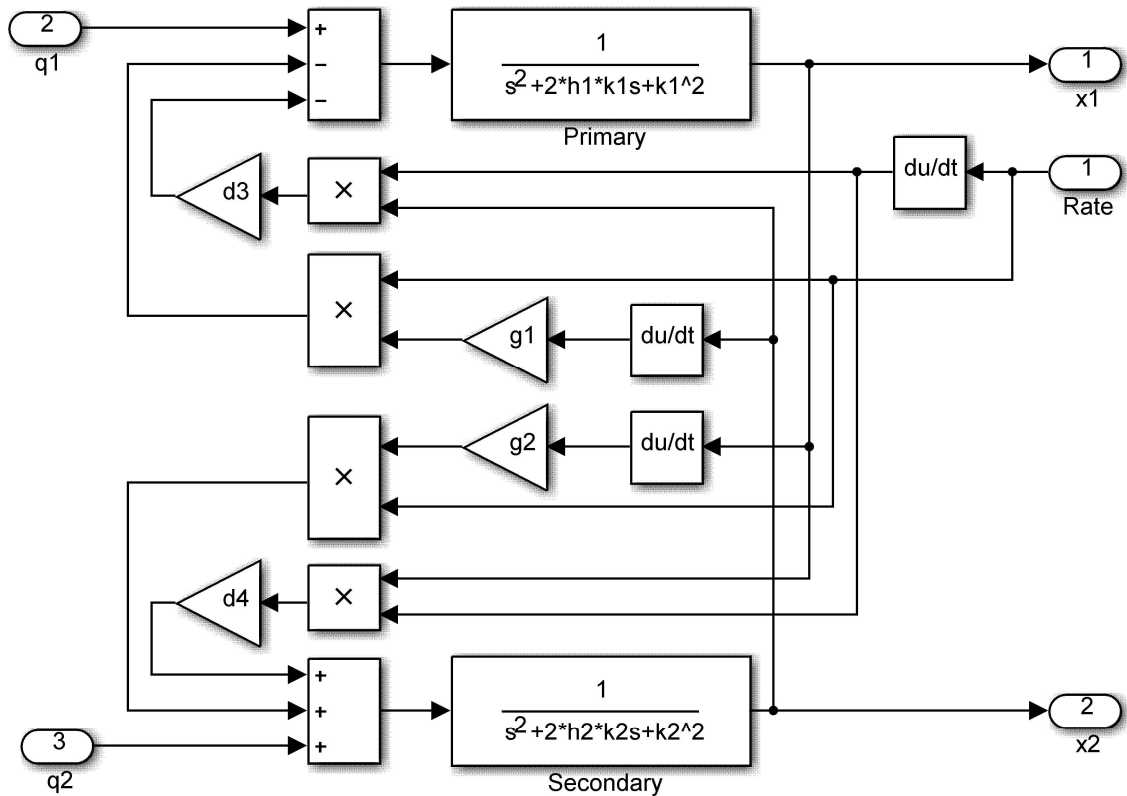


Рис. 3.11. Модель динаміки чутливого елемента

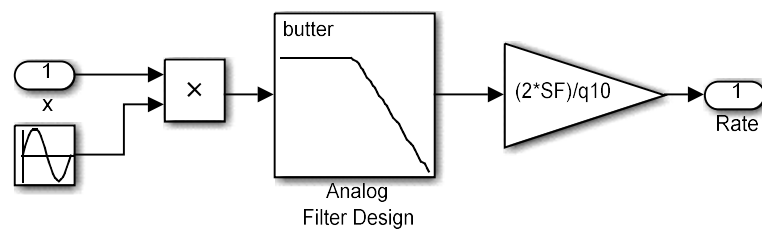


Рис. 3.12. Модель вторинного детектора

Вихід по вторинним коливанням є помноженим на синусоїдальний сигнал із частотою збудження і результат проходить через фільтр нижніх частот 8-го порядку Баттерворта (Butterworth). Вихід фільтру множиться на коефіцієнт, який масштабує його до виходу у термінах кутової швидкості, яка вимірюється.

3.5 Висновки

В цьому розділі був проведений аналіз динаміки чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів на основі їх узагальнених рівнянь руху. Отримано вирази для розрахунку сталих амплітуд, фаз і власних частот первинних і вторинних коливань, які відповідають сталій кутовій швидкості.

Треба також зазначити, що ці вирази були отримані без прямого розв'язання рівнянь руху відносно первинних і вторинних зміщень. Це було зроблено із врахуванням того, що розв'язки у замкненій формі початкових рівнянь в термінах первинного і вторинного рухів, які є коливальними, є досить громіздкими і, отже, не вважаються корисними для подальшого аналізу. З іншого боку, всі важливі залежності від кутової швидкості виражаються в амплітудах і фазах, а не в дійсних рухах чутливого елемента.

В додаток до параметрів первинних і вторинних коливань чутливого елемента, було також отримано вирази для розрахунку параметрів фазової траєкторії його руху в залежності від зовнішньої кутової швидкості, що стало можливим завдяки запропонованій апроксимації для розрахунку великої напіввісі. Виявлена залежність кута обертання траєкторії руху чутливого елемента від кутової швидкості дозволяє розробляти методи вимірювання кутової швидкості відмінні від безпосереднього вимірювання амплітуди вторинних коливань, або комбіновані методи, які підвищують якість вимірювання кутової швидкості.

Продемонстровані у цьому розділі розв'язки узагальнених рівнянь руху коріолісових вібраційних гіроскопів не тільки дозволяють аналізувати параметри руху чутливого елемента на основі, що обертається, але також

являють собою основу для подальшого обчислення і оптимізації основних вимірювальних характеристик. А запропонована схема числового моделювання руху чутливого елемента на основі повної математичної моделі дозволяє оцінювати ефективність отриманих результатів.

Таким чином, виконані в цьому розділі дослідження дозволили отримати наступні нові наукові та практичні результати:

- вирази для розрахунку амплітуд і фаз первинного і вторинного руху в залежності від зовнішньої кутової швидкості і параметрів чутливого елемента на основі повних узагальнених рівнянь руху;
- вирази для розрахунку власних частот первинних і вторинних коливань в залежності від кутової швидкості за умови малого демпфування;
- точні та наближені вирази для розрахунку напіввісей та кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента на основі, що обертається, в залежності від конструктивних параметрів чутливих елементів;
- схеми числового моделювання роботи коріюлісових вібраційних гіроскопів на основі повної узагальненої математичної моделі в програмному середовищі Сімулінк/Матлаб;
- продемонстровано можливість використання кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента для вимірювання кутової швидкості.

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІКА КВГ В ДЕМОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛАХ

У попередньому розділі було проаналізовано динаміку чутливого елемента КВГ в термінах узагальнених координат x_1 і x_2 , які описують гармонічний первинний і вторинний рух відповідно.

Базуючись на детектуванні коріолісового прискорення, яке виникає завдяки обертанню в коливальних структурах, КВГ мають трохи більш складні математичні моделі порівняно із традиційними типами гіроскопів. Одне із таких ускладнень є результатом того, що корисний сигнал, пропорційний зовнішній кутовій швидкості, модулюється навмисно збудженими первинними коливаннями. З точки зору математичного моделювання, це призводить до необхідності «демодулювати» розв'язок у термінах зміщень чутливого елемента, для того, щоб отримати практичні результати для аналізу динаміки КВГ та його похибок ([103], [104], [124]). З точки зору теорії керування, традиційне представлення КВГ включає сигнал збуджених первинних коливань як вхід до динамічної системи, і невідому кутову швидкість як коефіцієнт у її передатній функції. Як результат, динаміка КВГ аналізується, головним чином, в сталому стані, тоді як аналіз перехідного процесу опускається через його очевидну складність.

4.1 Рівняння руху в демодульованих сигналах

Спрощені по відношенню до малих кутових швидкостей ($\Omega^2 \approx 0$) узагальнені рівняння руху КВГ (2.29) набувають наступну форму:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_3\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\dot{\Omega}x_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

В рівняння руху (4.1) кутова швидкість Ω входить як невідомий і змінний коефіцієнт, а не як вхід до системи подвійного осцилятора. Представлення такої динамічної системи як традиційної системи керування подано на рис. 4.1.

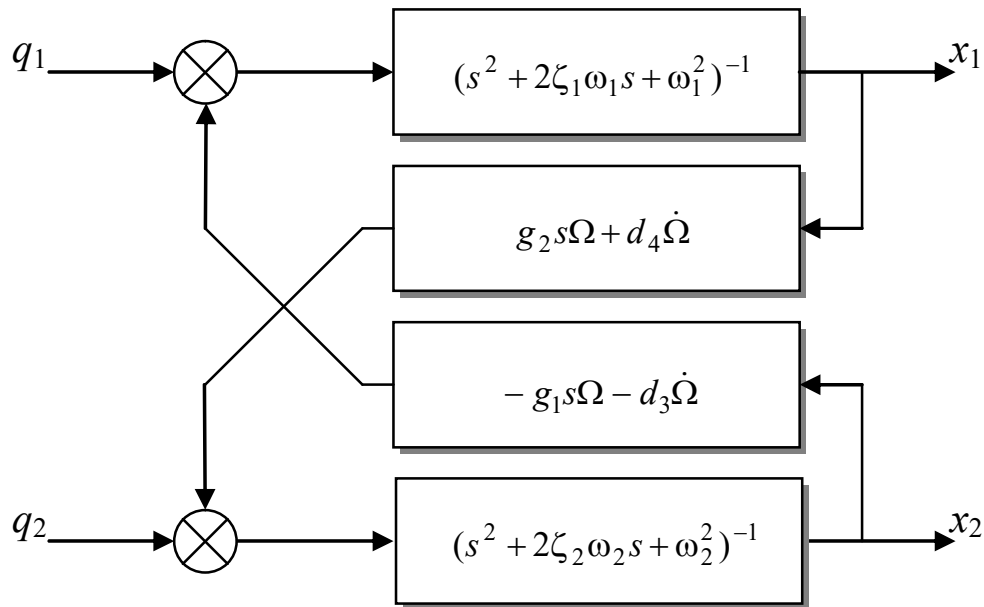


Рис. 4.1. Традиційне представлення КВГ в теорії систем керування

Для того, щоб ідентифікувати кутову швидкість, треба виявити вторинні коливання чутливого елемента і виміряти їхню амплітуду, яка є приблизно прямо пропорційною кутовій швидкості, і фазу, яка дає знак.

Сумісне з більшістю формулювань у теорії автоматичного керування представлення динаміки КВГ повинно мати невідому кутову швидкість як вхід і її виміряну величину як вихід.

Рівняння руху (4.1) можуть бути далі спрощені шляхом припущення, що обертальне і коріолісові прискорення, що діють по координаті первинних коливань, є незначними порівняно із прискореннями від приводних сил

$$g_1\Omega\dot{x}_2 + d_3\dot{\Omega}x_2 \ll q_1(t). \quad (4.2)$$

Це припущення відповідає відрізанням зворотного зв'язку від вторинних коливань до первинних на рис. 4.1. Припущення (4.2) має результатом наступні спрощені рівняння руху КВГ:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\Omega x_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Тут також приймалося, що ніякі зовнішні сили не впливають на вторинні коливання, що означає, що $q_2(t) = 0$. Система рівнянь (4.3) тепер ідеально придатна для подальших перетворень до бажаного представлення в термінах невідомої кутової швидкості.

За рахунок належного вибору фазового зсуву напруги збудження, прикладеної до чутливого елемента, сила збудження може бути наданий вигляд ідеальної гармонічної форми. Використовуючи експоненціальне представлення комплексних чисел, така приводна сила $q_1(t)$ може бути подана як

$$q_1(t) = q_{10} \sin(\omega t) = \text{Im}\{q_{10} e^{j\omega t}\}. \quad (4.4)$$

Тут ω є частотою збудження, заданою в радіанах в секунду, q_{10} є постійною амплітудою прискорення збудження.

Неоднорідні розв'язки рівнянь руху (4.3) для первинних і вторинних коливань шукаються в подібній до (3.8) і (3.9) формі [25]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \text{Im}\{A_1(t)e^{j\omega t}\}, \\ A_1(t) &= A_{10}(t)e^{j\varphi_1(t)}, \\ x_2(t) &= \text{Im}\{A_2(t)e^{j\omega t}\}, \\ A_2(t) &= A_{20}(t)e^{j\varphi_2(t)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де A_{10} і A_{20} є амплітудами первинних і вторинних коливань, φ_{10} і φ_{20} є відповідними фазовими зсувами по відношенню до сили збудження. Хоча ці величини є дійсними (не уявними), вони об'єднуються в комплексних амплітудно-фазових змінних A_1 і A_2 .

Замітимо, що на відміну від (3.8) і (3.9), ці амплітуди і фази є тепер змінними у часі.

Підстановка виразів (4.4) і (4.5) в рівняння (4.3) призводить до наступних рівнянь руху в термінах комплексних амплітудно-фазових змінних, а не дійсних узагальнених координат:

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + 2(\zeta_1\omega_1 + j\omega)\dot{A}_1 + (\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_1\zeta_1)A_1 = q_{10}, \\ \ddot{A}_2 + 2(\zeta_2\omega_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_2\zeta_2)A_2 \\ = (j\omega g_2\Omega + d_4\dot{\Omega})A_1 + g_2\dot{A}_1\Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Рівняння (4.6) описує варіації амплітуди і фази первинних і вторинних рівнянь в часі по відношенню до невідомої не постійної кутової швидкості $\Omega(t)$. Це дозволяє проводити аналіз динаміки коріолісового вібраційного гіроскопа, без обмеження кутової швидкості бути постійною, або такою, що повільно змінюється.

Аналізуючи систему (4.6), можна побачити, що перше рівняння може бути розв'язаним окремо від другого. Після того, як однорідний розв'язок першого рівняння повільно затухає, залишається тільки неоднорідний розв'язок. В цьому випадку ustalена амплітуда первинних коливань є

$$A_1 = \frac{q_{10}}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega_1\zeta_1\omega}, \quad (4.7)$$

і вона є постійною в часі, даючи $\ddot{A}_1 = \dot{A}_1 = 0$. Дійсно, більшість вимірювань у часі кутової швидкості виконуються, коли первинні коливання вже встановилися. Як результат, залишається тільки рівняння для вторинних коливань, в якому комплексна первинна амплітуда A_1 є тільки постійним параметром, що задається (4.7):

$$\begin{aligned} & \ddot{A}_2 + 2(\zeta_2\omega_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_2\zeta_2)A_2 \\ & = (j\omega g_2\Omega + d_4\dot{\Omega})A_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) тепер описує амплітуду і фазу вторинних коливань відносно усталених первинних коливань.

4.2 Передатні функції коріолісових вібраційних гіроскопів

Рівняння руху чутливого елемента КВГ у формі (4.8) дозволяють аналізувати його перехідні процеси в амплітудах і фазах по відношенню до довільних кутових швидкостей, що прикладені до системи. Застосування перетворення Лапласа до рівнянь (4.8) за нульових початкових умов для всіх залежних від часу змінних призводить до наступних виразів:

$$[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2\omega_2(s + j\omega) + \omega_2^2]A_2(s) = A_1[d_4s + jg_2\omega]\Omega(s). \quad (4.9)$$

Перетворення за Лапласом розв'язку алгебричного рівняння (4.9) для вторинних амплітуд-фаз є

$$A_2(s) = \frac{A_1(d_4s + jg_2\omega)}{(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2\omega_2(s + j\omega) + \omega_2^2} \Omega(s). \quad (4.10)$$

Розглядаючи кутову швидкість як вхід, передатна функція системи для вторинних амплітуд-фаз є

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{A_2(s)}{\Omega(s)} = \frac{A_1(d_4s + jg_2\omega)}{(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2\omega_2(s + j\omega) + \omega_2^2} = \\ &= \frac{q_{10}(d_4s + jg_2\omega)}{[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2\omega_2(s + j\omega) + \omega_2^2][\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_1\zeta_1]}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Можна помітити, що передатна функція (4.11) має комплексні коефіцієнти, які призводять також до комплексних виходів системи. Хоча це є дещо незвично, вона дає нам можливість аналізувати динаміку КВГ і перехідні процеси через кутову швидкість у розімкненій динамічній системі.

Передатна функція (4.11) описує демодульовану динаміку КВГ у випадку довільної зміни вторинних амплітуд. Однак, якщо кутова швидкість змінюється

повільно в порівнянні із первинними коливаннями, що є справедливим для більшості застосувань КВГ, вторинна амплітуда може розглядатися також як повільно змінна. Це припущення дозволяє знехтувати похідними вищих порядків вторинної амплітуди у рівнянні (4.8), наприклад $\ddot{A}_2 \approx 0$. Нехтування похідною другого порядку дає

$$2(\zeta_2 \omega_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_2\zeta_2)A_2 = (j\omega g_2 \Omega + d_4 \dot{\Omega})A_1, \quad (4.12)$$

і відповідна передатна функція кутової швидкості стає

$$W_2(s) = \frac{q_{10}(d_4 s + jg_2 \omega)}{[2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2 - \omega^2 + j2\omega(\zeta_2 \omega_2 + s)][\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_1\zeta_1]}. \quad (4.13)$$

Комплексна передатна функція (4.13) є простішою порівняно із функцією (4.11), і може замінити її у певних специфічних задачах, коли потрібен аналіз кутової швидкості, що повільно змінюється.

Під час моделювання динаміки КВГ, що базується на комплексних амплітудно-фазових передатних функціях (4.11) або (4.13), можемо мати проблеми, пов'язані з комплексними коефіцієнтами цих передатних функцій. Одним із шляхів, щоб уникнути цієї проблеми, - розглядати дійсну та уявну частини комплексної амплітуди як окремі сигнали, які потім об'єднуються разом, даючи дійсну амплітуду і фазу. Для того, щоб отримати передатні функції для таких сигналів, давайте представимо первинну і вторинну амплітуду як:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{1R} + jA_{1I}, \\ A_2 &= A_{2R} + jA_{2I}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Складові первинних коливань можуть бути легко знайдені шляхом підстановки виразів (4.14) у формулу (4.7), отримуючи таким чином

$$\begin{aligned}
A_{1R} &= \frac{q_{10}(\omega_1^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_1^2 \zeta_1^2 \omega^2}, \\
A_{1I} &= -\frac{2q_{10}j\omega\omega_1\zeta_1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_1^2 \zeta_1^2 \omega^2}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

В той же час, підстановка виразів (4.15) в рівняння руху (4.8) і застосування перетворення Лапласа з нульовими початковими умовами дає

$$\begin{cases}
(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2)A_{2R}(s) - 2\omega(\omega_2\zeta_2 + s)A_{2I}(s) \\
= (A_{1R}d_4s - A_{1I}g_2\omega)\Omega(s), \\
(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2)A_{2I}(s) + 2\omega(\omega_2\zeta_2 + s)A_{2R}(s) \\
= (A_{1I}d_4s + A_{1R}g_2\omega)\Omega(s).
\end{cases} \tag{4.16}$$

Розв'язання алгебричної системи (4.16) відносно невідомих дійсної та уявної частин вторинної комплексної амплітуди виражається в

$$\begin{aligned}
A_{2R}(s) &= \frac{A_{1R}M_{RR}(s) + A_{1I}M_{RI}(s)}{P(s)}\Omega(s), \\
A_{2I}(s) &= \frac{A_{1R}M_{IR}(s) + A_{1I}M_{II}(s)}{P(s)}\Omega(s).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Тут поліноми чисельника від дійсної та уявної частин первинних амплітуд надаються наступними виразами:

$$\begin{aligned}
M_{RR}(s) &= s(\omega_2^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2) - \omega^2(d_4s - 2g_2(s + \omega_2\zeta_2)), \\
M_{RI}(s) &= \omega[2d_4s(s + \omega_2\zeta_2) - g_2(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2)], \\
M_{II}(s) &= 2\omega^2g_2(s + \omega_2\zeta_2) + d_4s(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2), \\
M_{IR}(s) &= \omega[g_2(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2) - 2d_4s(s + \omega_2\zeta_2)], \\
P(s) &= 4(s + \omega_2\zeta_2)^2\omega^2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2\zeta_2s + s^2)^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Отримані вирази (4.15), (4.17) та (4.18) дозволяють аналізувати динаміку КВГ у системі керування без необхідності включати комплексно-значні сигнали.

4.3 Амплітудні і фазові відгуки

Для того, щоб обчислити амплітудний відгук системи, використовуючи передатну функцію (4.11), змінна Лапласа s повинна бути замінена на змінну Фур'є $j\lambda$, де λ є частотою коливань кутової швидкості:

$$W_2(j\lambda) = \frac{jq_{10}(d_4\lambda + g_2\omega)}{[\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2 + 2j\zeta_2\omega_2(\lambda + \omega)][\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta_1\omega_1]}. \quad (4.19)$$

Абсолютна величина комплексної функції (4.19) є амплітудним відгуком амплітуди вторинних коливань на гармонічну кутову швидкість, а відповідна фаза комплексної функції є фазовим відгуком:

$$A(\lambda) = \frac{q_{10}(d_4\lambda + g_2\omega)}{\sqrt{[(\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2)^2 + 4\zeta_2^2\omega_2^2(\lambda + \omega)^2][(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega_1^2\omega^2]}}, \quad (4.20)$$

$$\varphi(\lambda) = \tan^{-1} \left\{ \frac{[\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2][\omega_1^2 - \omega^2] - 4\omega_1\omega_2\zeta_1\zeta_2\omega(\lambda + \omega)}{2[\omega_2\zeta_2(\lambda + \omega)(\omega_1^2 - \omega^2) + \omega_1\zeta_1\omega(\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2)]} \right\}.$$

Слід відмітити, що припускаючи постійною кутову швидкість ($\lambda = 0$) у виразах (4.20), можна отримати виведені раніше вирази для амплітуди і фази вторинних коливань.

Аналіз виразів (4.20) показує, що ефект від коливальної кутової швидкості є практично еквівалентним зсуву частоти збудження частотою кутової швидкості. Це змушує КВГ, особливо такі, які мають високий Q-фактор, втрачати їхнє резонансне настроювання, що, у відповідь, виражається у суттєвій зміні їхнього масштабного коефіцієнта (динамічна похибка). Розв'язання цієї проблеми шляхом правильного вибору відношення парціальних частот і демпфування, що буде розглядатися далі у цій роботі.

4.4 Стійкість і оптимізація перехідного процесу

Як стійкість так і якість перехідної реакції на одиничну сходинку залежить від положення полюсів системи в комплексній площині. Робота КВГ на демодульованих сигналах описується виведеною вище передатною функцією (4.11).

Полюси передатної функції (4.11) є наступними:

$$s_{1,2} = -\omega_2 \zeta_2 \pm j\omega_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - j\omega. \quad (4.21)$$

Аналізуючи вирази (4.21), легко побачити, що КВГ є природно стійкими. Справді, якщо відносний коефіцієнт демпфування $\zeta_2 \leq 1$, тоді дійсні частини полюсів є

$$-\omega_2 \zeta_2 < 0.$$

Якщо ж відносний коефіцієнт демпфування $\zeta_2 > 1$, тоді дійсні частини є

$$-\omega_2 (\zeta_2 \pm \sqrt{\zeta_2^2 - 1}) < 0.$$

Ідеальний (пів-коливальний) перехідний процес у амплітуді вторинних коливань за кутової швидкості у вигляді одиничної сходинки є досяжним, якщо уявні частини полюсів (4.21) є нульовими. Один полюс має велику уявну частину

$$-\omega_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - \omega < 0,$$

яка завжди знаходиться нижче нуля, і відповідає високочастотним коливанням в оригінальному сигналі. Другий полюс відповідає за низькочастотні коливання і є найбільш суттєвим для перехідного процесу. Для цього полюса умова ідеального перехідного процесу має наступну форму:

$$\omega_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - \omega = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}}. \quad (4.22)$$

Наприклад, якщо первинні коливання збуджуються на чистому резонансі для кращої чутливості, рівняння (4.22) трансформується в

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - \zeta_2^2}}. \quad (4.23)$$

Як результат, для того, щоб забезпечити ідеальний перехідний процес для амплітуди вторинних коливань, слід конструювати чутливий елемент КВГ із власною частотою вторинних коливань відповідно до (4.23).

Іншою важливою характеристикою якості перехідного процесу в системі є його час усталення, який визначається дійсною частиною полюсів системи і може апроксимований як

$$T = -\frac{\ln(\varepsilon)}{\omega_2 \zeta_2}. \quad (4.24)$$

Тут ε є допуск помилки ($\varepsilon=0.01$ для 1% допуску). Із цієї залежності можна бачити, що для того, щоб мінімізувати час усталення, треба максимізувати знаменник $\omega_2 \zeta_2$. Оскільки чутливість КВГ обернено пропорційно відноситься до його парціальної частоти, тому зменшення його демпфування разом з парціальними частотами буде збільшувати час усталення його перехідного процесу.

Іншим наслідком представленого вище аналізу полюсів системи і її перехідного процесу є те, що справжня амплітуда вторинних коливань головним чином визначається низькочастотним полюсом, тоді як впливом від високочастотного полюса можна знехтувати, оскільки він буде усунений під час процесу демодуляції. Іншими словами, домінуючою поведінкою є повільна зміна амплітуди і фази, які представляються передатною функцією (4.13) системи. Єдиним полюсом цієї передатної функції є

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\frac{\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta_2\omega_2}{2(\zeta_2\omega_2 + j\omega)} \\
&= -\omega_2\zeta_2 \frac{\omega_2^2 + \omega^2}{2(\zeta_2^2\omega_2^2 + \omega^2)} + j \frac{\omega_2^2\omega - 2\omega_2^2\zeta_2^2\omega - \omega^3}{2(\zeta_2^2\omega_2^2 + \omega^2)}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ідеальний перехідний процес на одиничну сходинку досягається, коли уявна частина (4.25) дорівнює нулю, що, в свою чергу, дає

$$\omega = \omega_2 \sqrt{1 - 2\zeta_2^2}. \tag{4.26}$$

що очевидно є власною частотою вторинних коливань. Однак, як це відмічалось раніше, краща чутливість досягається, коли чутливий елемент приводиться у первинний резонанс, що означає, що

$$\omega = \omega_1 \sqrt{1 - 2\zeta_1^2}.$$

В цьому випадку

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - 2\zeta_2^2}}. \tag{4.27}$$

Хоча ця формула є дещо відмінною від отриманої раніше залежності (4.23), справжні величини є достатньо тисними. Якщо вторинна парціальна частота вибирається відповідно до (4.27), тоді полюсом (4.25) стає

$$s_1 = -\omega_1\zeta_2 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - 2\zeta_2^2}} = -\omega_2\zeta_2. \tag{4.28}$$

Ясно, що перехідний процес на одиничну сходинку все ще задається виразом (4.24), і всі поради про мінімізацію часу усталення залишаються такими самими.

Давайте зараз продемонструємо шляхом числового моделювання, яким чином запропонований тут вибір частоти збудження і демпфування впливає на одиничний ступінчастий перехідний процес для кутової швидкості. Реалістичне

числове моделювання базується на описаному в розділі 3.4 підході. В додаток до цього, хотілося б продемонструвати, як запусити моделювання із використанням дійсної та уявної передатних функцій (4.18), і перевірити їхні характеристики у порівнянні із числовим моделюваннями на основі повної моделі чутливого елемента. Simulink-модель, використана для моделювання КВГ із дійсною і уявною передатними функціями, показана на рис. 4.2.

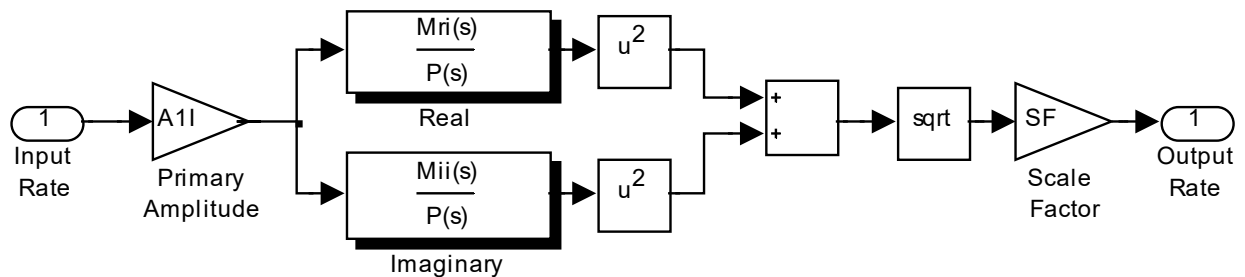


Рис. 4.2. Модель дійсної та уявної передатних функцій

Результати моделювання для цих моделей показані на рис. 4.3 та 4.4, де суцільна лінія відповідає виходу реалістичної моделі, крапкова лінія відповідає «реалістичному» еталонному виходу, і пунктирна лінія показує вхідну кутову швидкість.

Параметри моделювань є наступними: $\omega_1 = 1000\pi$, $\omega_2 = 1.05\omega_1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, $\omega = \omega_1$ для не оптимізованого перехідного процесу, і $\omega_2 = 0.987\omega_1$ - для оптимізованого на рис. 4.4.

У першому випадку на рис. 4.3 перехідний процес для не оптимізованого КВГ виражає значне перевищення і ясну коливальну поведінку. У другому випадку вторинна парціальна частота вибрана відповідно до (4.23), що має результатом пів-коливальний перехідний процес, як і очікувалось.

Із графіків на рис. 4.3 і 4.4, можна також побачити, що «реалістичний» перехідний процес є дещо відмінним від «комплексного» (що базується на дійсній та уявній передатних функціях).

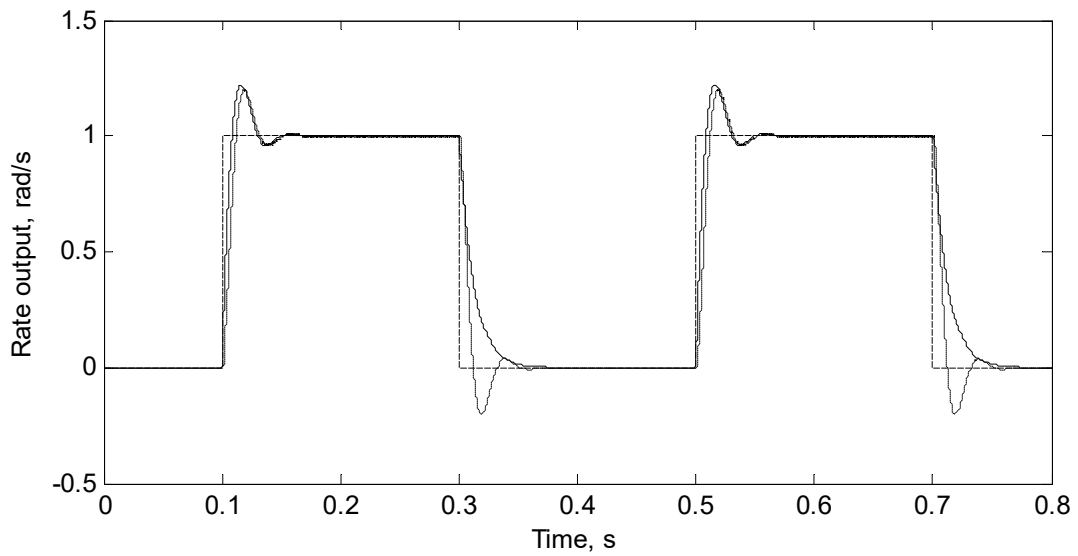


Рис. 4.3. Неоптимізований перехідний процес

(суцільна – модель дійсної та уявної передатних функцій, пунктир – вхідна кутова швидкість, крапкова – вихід реалістичного моделювання)

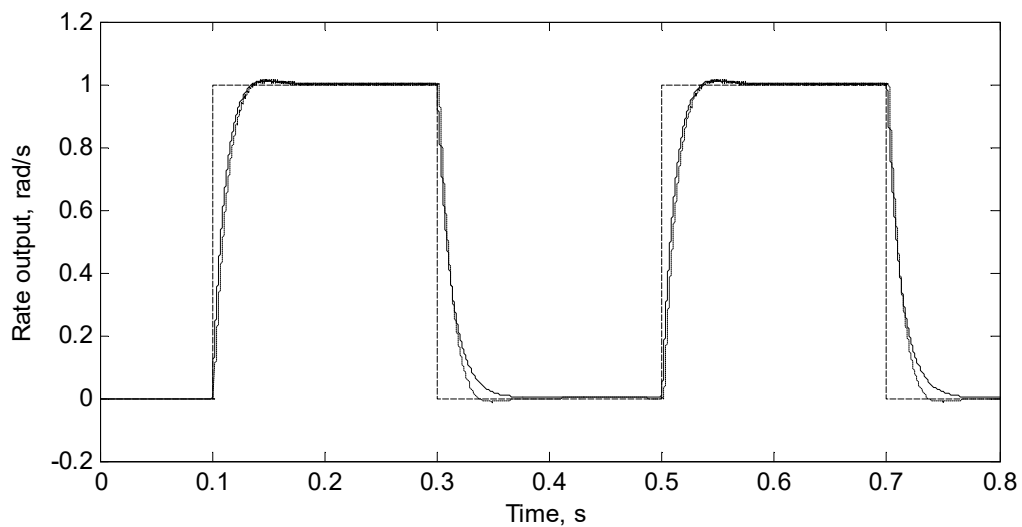


Рис. 4.4. Оптимізований перехідний процес

(суцільна – модель дійсної та уявної передатних функцій, пунктир – вхідна кутова швидкість, крапкова – вихід реалістичного моделювання)

Вважається, що це є результатом демодуляції сигналу із фіксованим фазовим зсувом, тоді як справжній фазовий зсув змінюється в часі. В той же час, «комплексний» вихід є більш тісним до дійсної оригінальної вторинних коливань, ніж демодульований «реалістичний».

4.5 Спрощена передатна функція та її точність

Існує досить важливий спеціальний випадок, коли комплексні передатні функції трансформуються в прості функції із дійсними коефіцієнтами. Припускаючи рівними первинну і вторинну парціальні частоти ($\omega_1 = \omega_2 = k$) та коефіцієнти демпфування ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$), резонансне збудження ($\omega = k\sqrt{1 - 2\zeta^2}$), і постійною кутовою швидкістю, можна легко отримати

$$A_{20}(s) = \frac{g_2 q_{10} \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{4\zeta k^2 (1 - \zeta^2)(s + k\zeta)} \Omega(s). \quad (4.29)$$

В цьому випадку вторинна амплітуда (4.29) зв'язана із вхідною кутовою швидкістю через наступну передатну функцію:

$$W_{20}(s) = \frac{A_{20}(s)}{\Omega(s)} = \frac{q_{10} g_2 \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{4k^2 \zeta (1 - \zeta^2)(s + k\zeta)}. \quad (4.30)$$

Як можна побачити, спрощена передатна функція КВГ (4.30) описує просту систему першого порядку із експоненціальним (не коливальним) перехідним процесом.

Коли демпфування є малим, наприклад $\zeta^2 \ll 1$, передатна функція (4.30) може бути переписана таким чином:

$$W_{20}(s) \approx \frac{q_{10} g_2}{4k^2 \zeta (s + k\zeta)}. \quad (4.31)$$

На кінець, передатна функція (4.31) пов'язує кутову швидкість із амплітудою вторинних коливань. Однак, більш доречно було б розглядати передатну функцію, що зв'язує невідому вхідну кутову швидкість з вимірною кутовою швидкістю, яку можна легко отримати із (4.31) шляхом ділення її на усталений масштабний коефіцієнт. Кінцевою передатною функцією є

$$W(s) = \frac{k\zeta}{s + k\zeta}. \quad (4.32)$$

Передатна функція (4.32) репрезентує систему КВГ, показану на рис. 4.5.

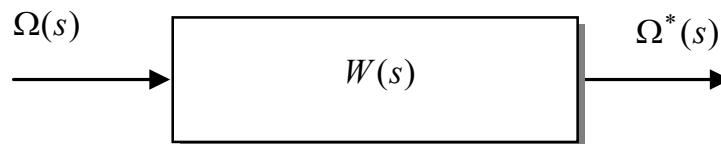


Рис. 4.5. КВГ в керуючих системах

Тут $\Omega^*(s)$ є вимірною КВГ зовнішньою кутовою швидкістю.

Немає потреби казати, що можливість використовувати передатні функції (4.30)-(4.32) для «не настроюваних» КВГ є також дуже бажаною. Тому давайте оцінимо точність функції (4.32) в представленому загальному випадку динаміки чутливого елемента КВГ.

Для того, щоб зробити це, давайте порівняємо перехідний процес, створений спрощеною передатною функцією і числовим розв'язком рівнянь (4.1) із подальшою демодуляцією. В якості критерію якості використовується така інтегральна функція:

$$J(\delta k, \delta \zeta) = \int_0^T [A_{20}(t) - A_{20}^*(t)]^2 dt. \quad (4.33)$$

Тут $\delta k = \omega_2 / \omega_1$ є відношенням парціальних частот, $\delta \zeta = \zeta_2 / \zeta_1$ є відношенням відносних коефіцієнтів демпфування, $A_{20}^*(t)$ є демодульованою вторинною амплітудою, яку отримано за допомогою числового моделювання на основі повної моделі. Графічне зображення функціоналу (4.33) показано нижче на рис. 4.6.

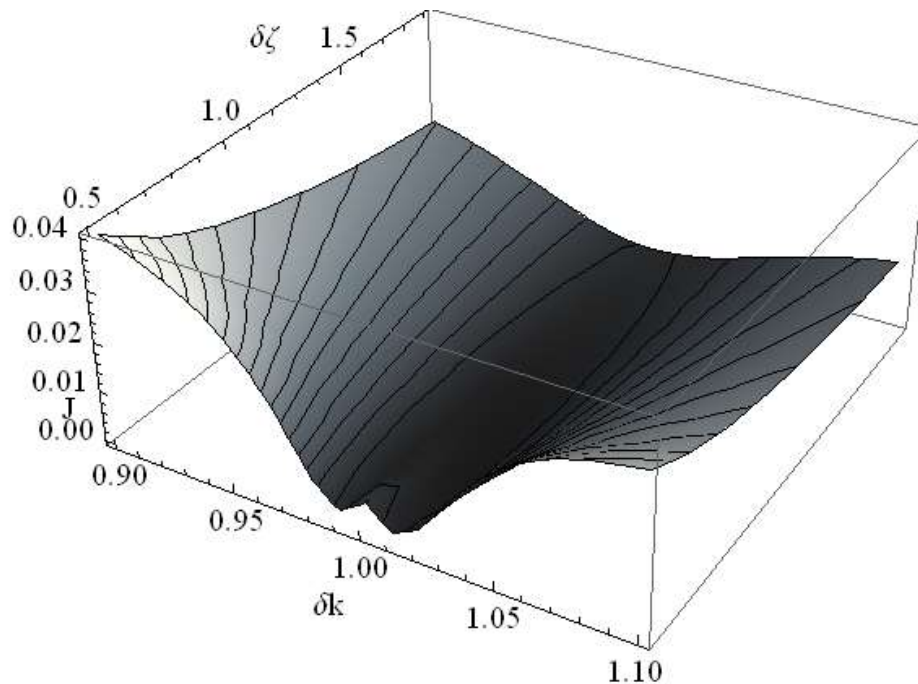


Рис. 4.6. Інтегральна похибка представлення перехідного процесу

Тут центральна затемнена зона відповідає ідеально настроєному приладу ($\delta k = 1$, $\delta \zeta = 1$). Можна бачити, що широкий діапазон чутливих елементів із змінними відношеннями парціальних частот і відносних коефіцієнтів демпфування також можуть бути представленими передатною функцією (4.32) з прийнятно низькою інтегральною похибкою (4.33).

4.6 Передатна функція обертання траєкторії

В попередній главі було показано, що у загальному випадку траєкторія руху чутливого елемента КВГ є еліпсом. Кут обертання траєкторії в усталеному стані є пропорційним кутовій швидкості. Після того, як були виведені спрощені передатні функції чутливого елемента КВГ, давайте тепер виведемо передатні функції для кута обертання траєкторії і проаналізуємо відповідні перехідні процеси.

Як це було продемонстровано у попередньому розділі, перетворення Лапласа вторинної амплітуди по відношенню до усталених первинних коливань і у випадку малого демпфування є

$$A_{20}(s) = \frac{q_{10} g_2}{4k^2 \zeta (s + k\zeta)} \Omega(s). \quad (4.34)$$

Постійна дійсна амплітуда первинних коливань із (4.7) є

$$A_{10} = \frac{q_{10}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_1^2 \zeta_1 \omega^2}}, \quad (4.35)$$

Кут обертання траєкторії, заданий (3.23), є

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2A_{10}A_{20} \cos \varphi}{A_{10}^2 - A_{20}^2},$$

де

$$\cos \varphi = \frac{2\zeta \delta k}{\sqrt{\delta k^4 - 2(1 - 2\zeta^2)\delta k^2 + 1}}.$$

Підстановка виразів (4.34) і (4.35) в (3.23) призводить до наступного виразу для кута обертання траєкторії у області Лапласа:

$$\theta(s) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{4g_2 k (s + k\zeta \delta k) \cos \varphi}{[4(s + k\zeta \delta k)^2 - g_2^2 k^2 \delta \Omega^2(s)]} \delta \Omega(s) \right]. \quad (4.36)$$

Тут $\delta k = \omega_2 / \omega_1$, $k = \omega_1$, $\delta\Omega(s) = \Omega(s) / \omega_1$. Безсумнівно вираз (4.36) є нелінійним в термінах вхідної кутової швидкості. Однак, приймаючи до уваги, що відносна кутова швидкість є малою ($\delta\Omega \ll 1$), вираз (4.36) може бути лінеаризований по відношенню до малого $\delta\Omega$ наступним чином:

$$\theta(s) \approx \frac{g_2 k \zeta \delta k}{(s + k \zeta \delta k) \sqrt{\delta k^4 - 2(1 - 2\zeta^2) \delta k^2 + 1}} \delta\Omega(s). \quad (4.37)$$

На кінець, пам'ятаючи, що $\delta k = 1$, як припускалося для (4.34), вираз (4.37) може бути далі спрощений до

$$\theta(s) \approx \frac{g_2 k}{2(s + k \zeta)} \delta\Omega(s). \quad (4.38)$$

Усталений стан отриманого виразу (4.38) є у повній згоді із раніше поданими усталеними виразами для кута обертання (3.32) траєкторії руху.

Відповідно до (4.38), передатна функція від відносної кутової швидкості до кута обертання траєкторії є такою:

$$W_0^\Omega(s) = \frac{\theta(s)}{\delta\Omega(s)} = \frac{g_2 k}{2(s + k \zeta)}. \quad (4.39)$$

Передатна функція (4.39) може тепер бути використаною для синтезу систем керування траєкторією руху чутливого елемента, а також для забезпечення вимірювань кутової швидкості сучасними методами.

Результати числового моделювання траєкторії руху чутливого елемента, що базується на рівняннях (4.1), показано на рис. 4.7.

Припускається, що первинні коливання вже є усталеними, і прикладається постійна кутова швидкість. Відповідні моделювання для кута обертання траєкторії показані на рис. 4.8.

Тут пунктирна лінія відповідає спрощеній апроксимації (4.38). Можна бачити, що наявна значна усталена помилка, яка зменшує придатність до використання виведеної спрощеної моделі (4.38).

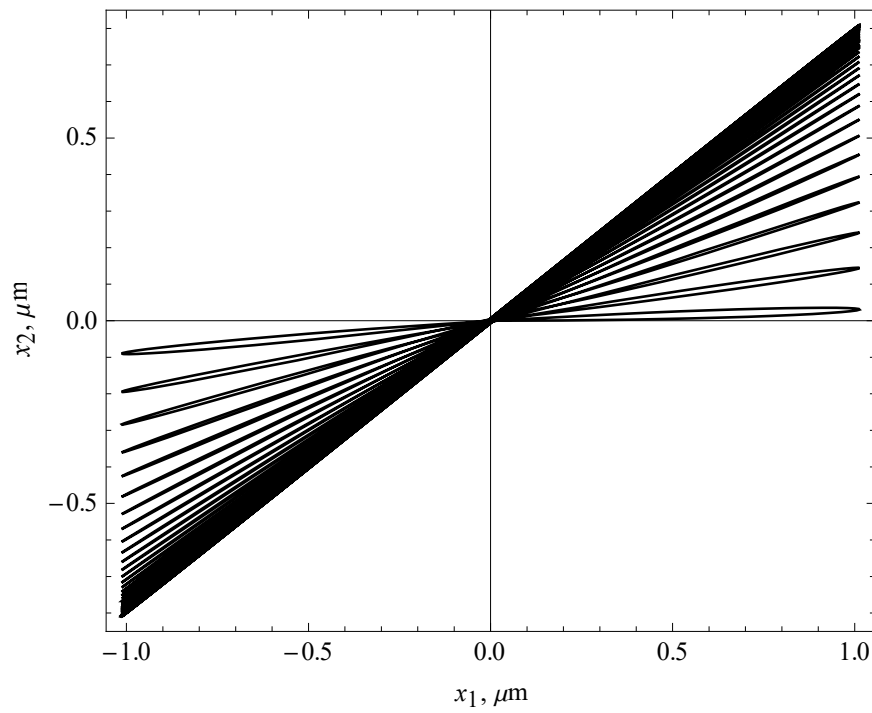


Рис. 4.7. Траєкторія руху чутливого елемента КВГ

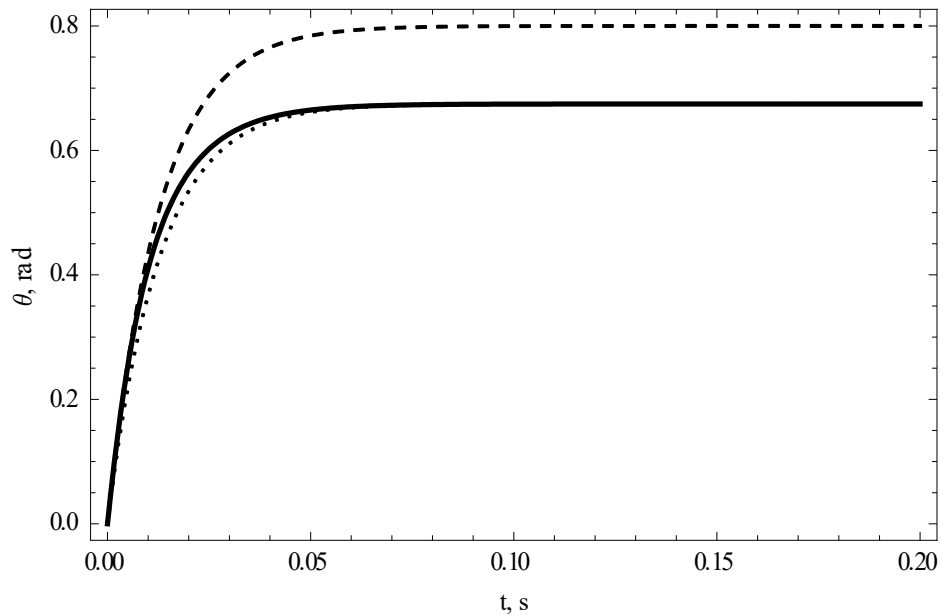


Рис. 4.8. Моделювання перехідного процесу
(суцільна – точно змодельований, пунктир – спрощена апроксимація,
крапками – покращена апроксимація)

Аналізуючи вираз (4.38), можна бачити, що в усталеному стані ($s = 0$) величина кута θ задається простим відношенням $g_2/2\zeta$. Із числового моделювання на рис. 4.8 (пунктирна лінія) ясно, що ця величина не є достатньо точною, тоді як динамічна частина здається прийнятною. Більш точне усталене значення можна отримати безпосередньо із виразу (4.36), який зводиться до наступного покращеного наближення:

$$\theta(s) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{4g_2\zeta\delta k}{\sqrt{\delta k^4 - 2(1 - 2\zeta^2)\delta k^2 + 1}} \right] \frac{\zeta k \delta k}{s + \zeta k \delta k} \delta\Omega(s). \quad (4.40)$$

Або у випадку чутливого елемента із співпадаючими парціальними частотами

$$\theta(s) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{4g_2}{\sqrt{2}} \right] \frac{\zeta k}{s + \zeta k} \delta\Omega(s). \quad (4.41)$$

Крапкова лінія на рис. 4.8 представляє перехідний процес, змодельований із використанням (4.41). Безсумнівно, ці покращені апроксимації є тіснішими до результатів прямих моделювань.

Наступна передатна функція може бути записана подібно до (4.39):

$$W_{\Omega}^{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{\delta\Omega(s)} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{4g_2}{\sqrt{2}} \right] \frac{\zeta k}{s + \zeta k}. \quad (4.42)$$

Отримані передатні функції для від зовнішньої кутової швидкості для кута траєкторії обертання чутливого елемента можуть тепер використовуватися для розробки систем обробки сигналів, а також керуючих контурів чутливого елемента.

4.7 Висновки

В наведених вище результатах дослідження демодульованої динаміки коріолісових вібраційних гіроскопів було отримано рівняння руху чутливого елемента коріолісових вібраційних гіроскопів відносно комплексних амплітуд, які містять у собі дійсні амплітуди і фази первинних і вторинних коливань. На основі цих рівнянь було отримано комплексну передатну функцію відповідні вирази для амплітудних і фазових відгуків до частоти гармонічної кутової швидкості. На основі цієї комплексної передатної функції було отримано дійсну, але спрощену передатну функцію, і продемонстровано її придатність до ефективного представлення динаміки чутливого елемента при аналізі систем. На основі спрощеної функції було також отримано передатну функцію по куту обертання траєкторії руху центра мас чутливого елемента.

В результаті, отримана вище математична модель руху чутливого елемента коріолісових вібраційних гіроскопів в термінах демодульованих сигналів приводить нас до важливих результатів у вигляді передатних функцій, де невідома кутова швидкість замість того, щоб бути невідомим коефіцієнтом в системі, стає її входом. Більш важливо, що тепер можна аналізувати динаміку чутливого елемента КВГ у термінах амплітуд із змінною огинальною, а не в коливальних переміщеннях по напрямку первинних і вторинних рухів.

Простота отриманих моделей дозволяє ефективно обчислювати і оптимізувати головні характеристики КВГ, і, що навіть є ще більш важливим, - синтезувати системи фільтрації і керування, використовуючи традиційні методології для систем автоматичного керування і обробки сигналів.

Таким чином, в цьому розділі було отримано наступні нові наукові та прикладні результати:

- узагальнені рівняння руху чутливих елементів для змінної кутової швидкості в термінах комплексних амплітуд;
- узагальнена комплексна передатна функція коріолісових вібраційних гіроскопів від кутової швидкості до амплітуди вторинних коливань;

- комплексна передатна функція від кутової швидкості для амплітуд, які повільно змінюються в часі;
- вирази для розрахунку амплітудно та фазо-частотних характеристик для гармонічної кутової швидкості;
- отримано умови стійкості коливань чутливого елемента та оптимальності перехідного процесу в демодульованих сигналах;
- отримано спрощену дійсну передатну функцію коріолісових вібраційних гіроскопів та оцінено точність апроксимації нею повних передатних функцій;
- отримано вирази для точної та наближеної передатних функцій кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента від кутової швидкості.

РОЗДІЛ 5

МЕТОДОЛОГІЯ КОНСТРУЮВАННЯ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Аналіз рівнянь руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів та їхніх розв'язків, що вивчалися раніше, дозволяють вивести вирази для більшості вимірювальних характеристик і похибок таких датчиків. Це, в свою чергу, робить можливим оптимізувати їх характеристики шляхом правильного вибору конструктивних параметрів чутливого елемента, а також зменшити, або навіть виключити похибки вимірювання кутової швидкості.

5.1 Оптимальне збудження первинних коливань

Коріолісові вібраційні гіроскопи, які виготовлені в мініатюрних розмірах за допомогою мікромашинних технологій, як і багато із сучасних мікроелектромеханічних систем (МЕМС), використовують гребінчасті мікроструктури як для збудження первинних коливань, так і для детекції вторинних [36], [40]. Фотографія типової гребінчастої мікроструктури, яка є частиною системи збудження мікромеханічного гіроскопа і часто називається електростатичним гребінчастим двигуном, показана на рис. 5.1.

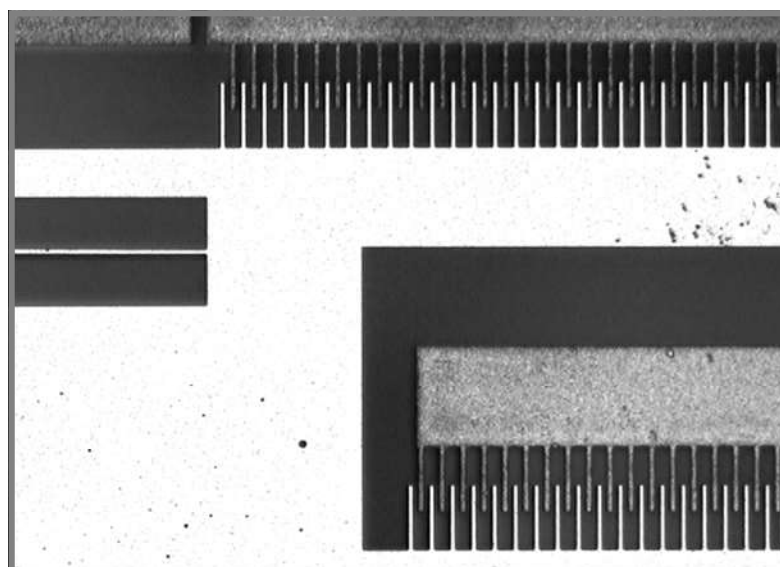


Рис. 5.1. Гребінчастий двигун мікромеханічного гіроскопа

Існуючі теорії гребінчастих мікроструктур, які роблять можливим аналіз нелінійних ефектів, є досить складними [58]. Як результат, конструктори мікроелектромеханічних систем часто використовують числове моделювання мікросистем з електростатичними гребінчастими приводами. Незважаючи на зростаючі обчислювальні можливості сучасних комп'ютерів, повні обчислення при числовому моделюванні все ще вимагають багато часу. Незважаючи на це, числові підходи не дозволяють проводити аналітичний аналіз систем збудження, що базуються на гребінчастому приводі. Отже проблема створення простого наближеного підходу до аналізу гребінчастих систем збудження, яка б враховувала суттєві для характеристик мікромеханічних гіроскопів нелінійні ефекти, є актуальною і буде розглянута в цьому підрозділі.

Принцип роботи гребінчастого двигуна

Давайте спочатку розглянемо роботу системи збудження первинних коливань. Схема на рис. 5.2 описує узагальнений метод збудження первинних коливань за допомогою гребінчастого приводу.

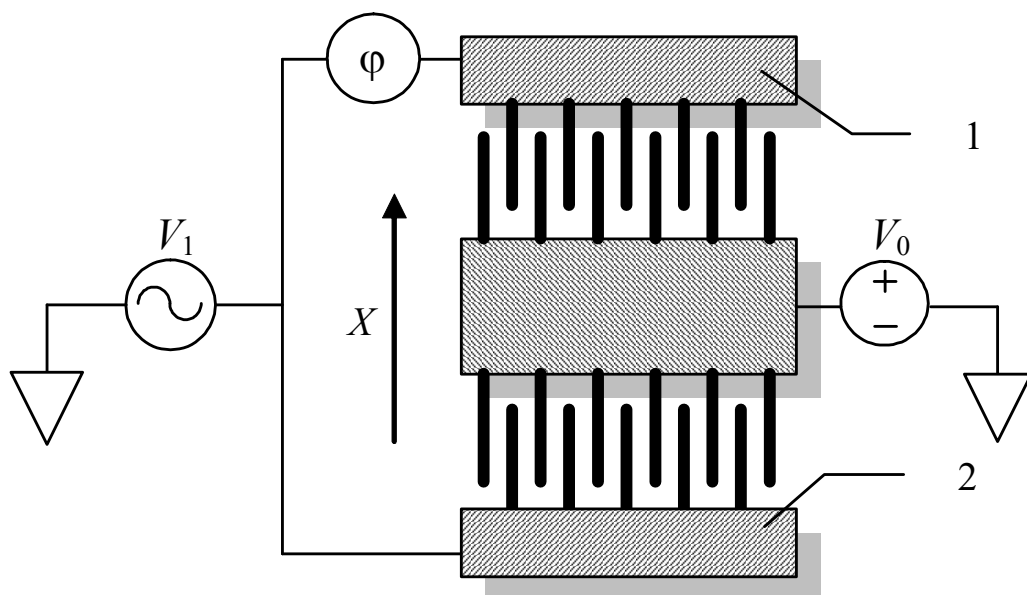


Рис. 5.2. Принцип збудження первинних коливань

Тут V_1 є напругою, прикладеною до статорів (нерухомі частини) гребінчастого приводу (1 і 2 на рис. 5.2), V_0 є постійною напругою, прикладеною до внутрішньої рухомої частини, φ є фазовим зсувом між напругами, прикладеними до першого і другого гребінчастого приводу. Повна електростатична сила, що діє на масу вздовж осі X в цьому випадку може визначатися як

$$F_x = \frac{(V_1(\tau + \varphi) - V_0)^2}{2} \frac{dC_1}{dx} + \frac{(V_1(\tau) - V_0)^2}{2} \frac{dC_2}{dx}, \quad (5.1)$$

де C_1 і C_2 є ємностями гребінчастих приводів 1 і 2 (рис. 5.2) відповідно, x є зміщенням маси вздовж відповідної осі, τ є фазою приводної напруги V_1 . У випадку симетричних і лінійних гребінчастих приводів, де ємностями на кінцях можна знехтувати і тоді

$$\frac{dC_1}{dx} \approx -\frac{dC_2}{dx} = \frac{dC}{dx} \approx \text{const},$$

і сила (5.1) стає

$$F_x = \frac{1}{2} [(V_1(\tau + \varphi) - V_0)^2 - (V_1(\tau) - V_0)^2] \frac{dC}{dx}. \quad (5.2)$$

В мікромеханічних вібраційних гіроскопах зазвичай бажають мати гармонічну форму первинних коливань, щоб зробити процес демодуляції настільки можливо точним. Тому можна вважати, що

$$V_1 = V \sin(\omega t),$$

$$V_0 = V\delta V.$$

В результаті вираз (5.2) стає

$$F_x = \frac{V^2}{2} [(\sin(\omega t + \varphi) - \delta V)^2 - (\sin(\omega t) - \delta V)^2] \frac{dC}{dx}. \quad (5.3)$$

Очевидно, що єдиним параметром, здатним впливати на форму сили збудження (5.3), є фазовий зсув φ між напругами на гребінчастих приводах.

Оптимальні режими роботи гребінчастого двигуна

Давайте визначимо цей фазовий зсув за критерієм максимальної ефективності. Якщо приводна сила не залежить від зміщення x , ефективність гребінчастого приводу може бути виражена як

$$\begin{aligned} P(\delta V, \varphi) &= \int_0^{2\pi} [F_x(\tau)]^2 d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + 8\delta V^2 + \cos(\varphi)) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(V^2 \frac{dC}{dx}\right)^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Графічне зображення чисельно обчисленого критерію якості (5.4) показано на рис. 5.3.

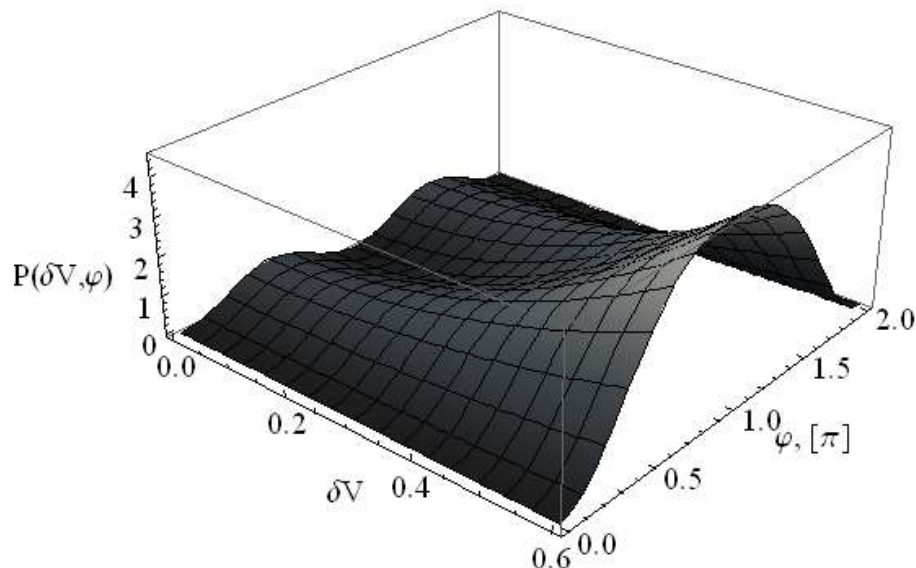


Рис. 5.3. Ефективність гребінчастого приводу

Аналізуючи графік на рис. 5.3, можна ясно бачити різні оптимальні способи збудження, що відповідають різним значенням напруги зміщення δV . Давайте ідентифікуємо ці способи.

Значення максимальної ефективності для фазового зсуву φ і відношення напруг δV в якості параметру можуть бути визначеними із наступного рівняння:

$$\frac{dP(\delta V, \varphi)}{d\varphi} = 0 \Rightarrow (4\delta V^2 + \cos \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (5.5)$$

Розв'язання рівняння (5.5) дає фази максимальної ефективності, що задані наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos(-4\delta V^2), \quad (\delta V < \frac{1}{2}), \\ \varphi &= \pi, \quad (\delta V \geq \frac{1}{2}), \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, \quad (\delta V = 0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Графік ефективності для способів максимальної ефективності, що задані різними напругами зміщення у виразах (5.6), показані на рис. 5.4.

Ясно, що існує два різних оптимальних фазових зсуви для різних значень ухилу δV , які призводять до двох суттєво різних способів приводу для первинного збудження: без напруги зміщення (заземлена маса) і зі зміщенням, яке є більшим за половину амплітуди приводної напруги.

Повні електростатичні сили, що діють на масу в цих способах, будуть визначатися за допомогою наступної формули

$$F_x = D(t) \frac{dC}{dx}. \quad (5.7)$$

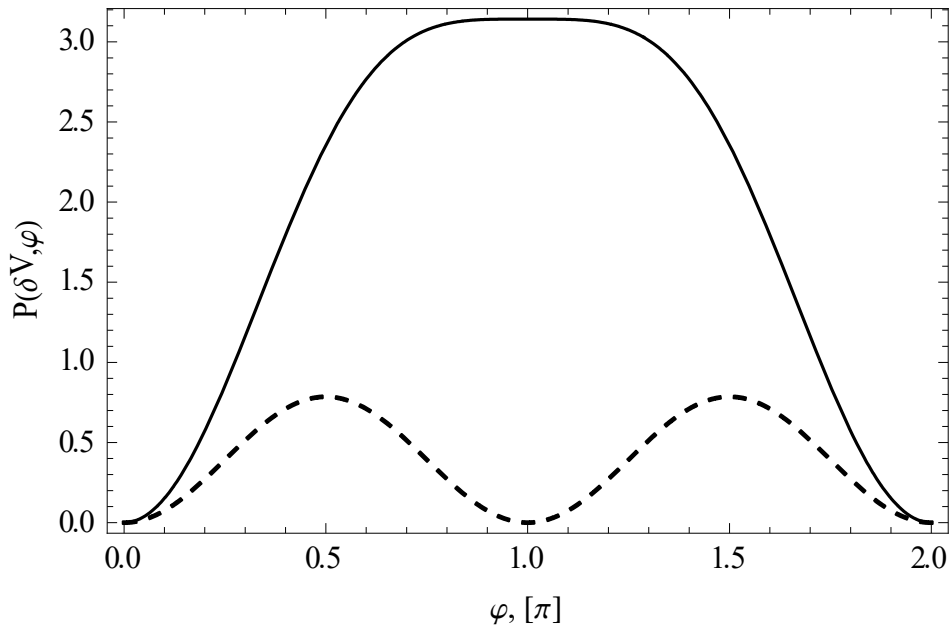


Рис. 5.4 Ефективність при різних напругах зміщення
(суцільна – $\delta V = 0.5$, пунктирна – $\delta V = 0$)

Тут $D(t)$ є приводною функцією, яка є відмінною для цих двох способів і може бути обчислена як

$$D(t) = 2V^2 \delta V \sin(\omega t), \quad \delta V \geq \frac{1}{2}, \quad (5.8 \text{ а})$$

$$D(t) = \frac{V^2}{2} \cos(2\omega t), \quad \delta V = 0. \quad (5.8 \text{ б})$$

Слід зазначити, що «ухильні» способи ($\delta V \geq 1/2$) призводять до більшої приводної сили (більш високої ефективності) порівняно із «заземленим» способом ($\delta V = 0$). В той же час, приводна сила в «заземленому» способі буде діяти із подвоєною частотою, відносно частоти приводної напруги (див. рис. 5.5).

Цей ефект подвоєння частоти веде до можливості відокремлювати напругу збудження від детектованої у частотній області. В результаті можна досягти кращих відношень «сигнал/шум».

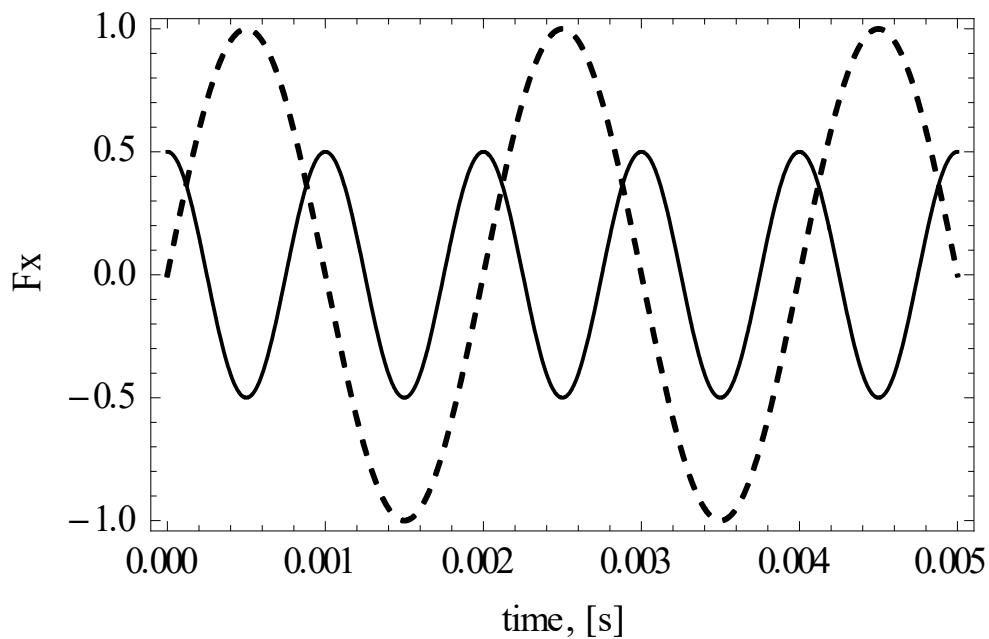


Рис. 5.5. Сила збудження у різних режимах
(суцільна – заземлена маса, пунктирна – із напругою зміщення)

Вплив конструкції елементів гребінки на лінійність ємності

Протягом всіх доведень, представлених вище, припускалось, що сила не залежить від зміщення маси. Це означає, що

$$dC/dx \approx const,$$

що є майже справедливим для малих зміщень. Але в деяких застосуваннях гребінчастих приводів є важливим досягти великих зміщень маси. Останнє часто зустрічається в мікромеханічних гіроскопах, коли більша амплітуда первинних коливань призводить до більшої чутливості до кутової швидкості. В цьому випадку похідна від ємності не є надалі постійною і залежить від зміщень нелінійним чином.

Давайте обчислимо ємність для елементарного елемента гребінчастої структури, який показано на рис. 5.6.

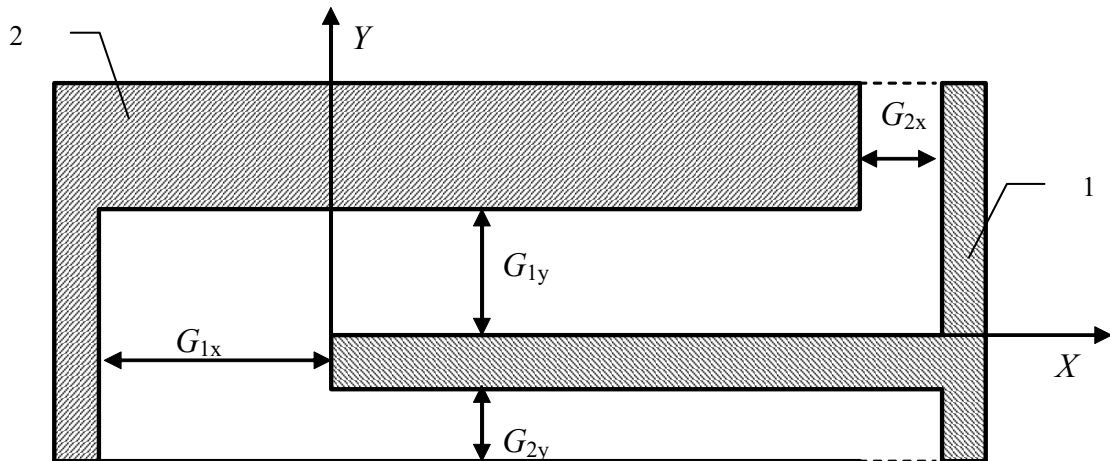


Рис. 5.6. Елементарна частина гребінчастого приводу

В цій структурі є чотири основних ємності: C_{ix} і C_{iy} - між статором ($i=1$) та масою ($i=2$) в напрямках X і Y відповідно. Іншими розмірами є L_i , B_i та H - довжина, ширина і висота голки гребінчастого приводу.

Початкове положення маси у показаній системі координат буде визначатися за допомогою чотирьох проміжків G_{ix} і G_{iy} .

Якщо зміщення маси відносно статора буде визначатися двома змінними x і y , тоді відповідними ємностями будуть

$$\begin{aligned}
 C_{1x} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 B_1 H}{G_{1x} - x}, \\
 C_{2x} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 B_2 H}{G_{2x} - x}, \\
 C_{1y} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (L_0 + x) H}{G_{1y} + y}, \\
 C_{2y} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (L_0 - x) H}{G_{2y} - y}.
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Тут L_0 є початковою довжиною перекриття, такою як

$$L_0 = L_2 - G_{1x} = L_1 - G_{2x}.$$

Повна ємність між масою і статором буде сумою всіх ємностей:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= C_{1x} + C_{2x} + C_{1y} + C_{2y} \\ &= n\epsilon\epsilon_0 H \left(\frac{B_1}{G_{1x} - x} + \frac{B_2}{G_{2x} - x} + \frac{L_0 + x}{G_{1y} + y} + \frac{L_0 + x}{G_{2y} - y} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Тут n є повною кількістю елементарних чарунок в гребінчастому приводі. Така ємність не буде більше лінійною функцією від зміщень. Залежність ємності від зміщень в напрямку x представлена на рис. 5.7.

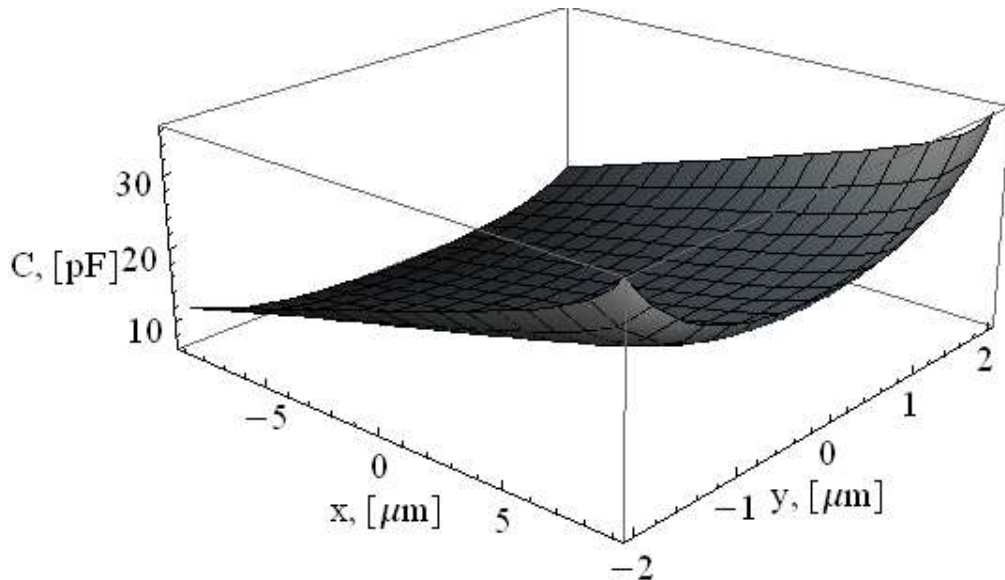


Рис. 5.7. Ємність як функція зміщень по x і y

Безсумнівно, для великих зміщень по координатам x і y , спостерігається нелінійність в ємності, заданій виразом (5.10). На рис. 5.8 можна бачити секцію графіка на рис. 5.7 вздовж осі x .

Тут пунктирна лінія відповідає «лінійній» ємності, де шириною кінчиків B_1 і B_2 в (5.10) нехтується (встановлюється в нуль). Із цього графіка можна

побачити, що «лінійна» апроксимація ємності помітно відрізняється від справжньої.

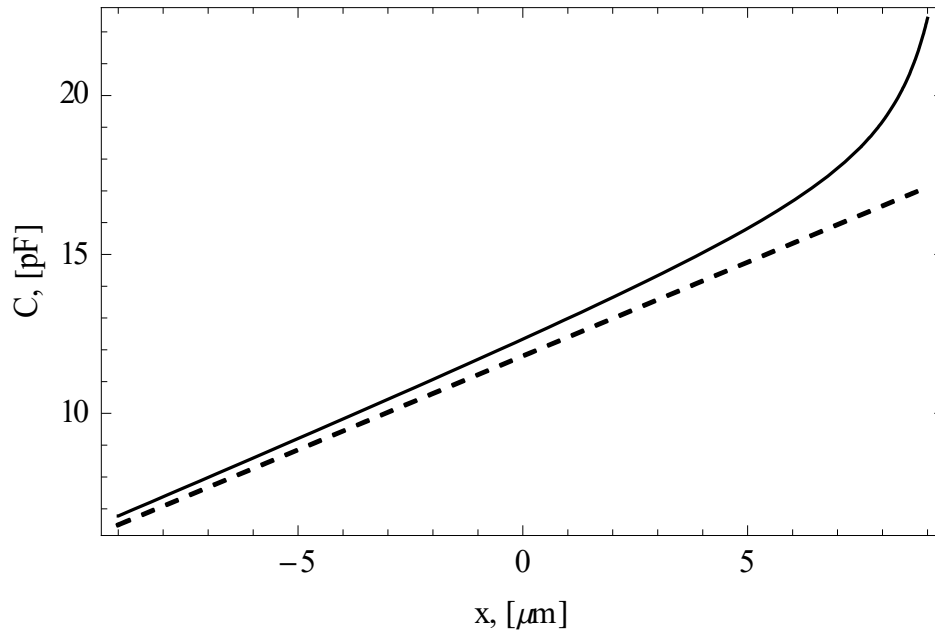


Рис. 5.8. Ємність гребінчастого приводу
(суцільна – нелінійна, пунктирна – нехтуючи шириною кінчика)

По відношенню до (5.10), ємності C_1 і C_2 в (5.1) для симетричного гребінчастого приводу будуть

$$\begin{aligned} C_1(x, y) &= C(x, y), \\ C_2(x, y) &= C(-x, y), \end{aligned} \quad (5.11)$$

і отже відповідні похідні для сили (5.1) можуть бути подані так

$$\frac{dC_1}{dx} = Hn\epsilon\epsilon_0 \left[\frac{B_1}{(G_{1x} - x)^2} + \frac{B_2}{(G_{2x} - x)^2} + \frac{1}{G_{1y} + y} + \frac{1}{G_{2y} - y} \right], \quad (5.12)$$

$$\frac{dC_2}{dx} = -Hn\epsilon\epsilon_0 \left[\frac{B_1}{(G_{1x} + x)^2} + \frac{B_2}{(G_{2x} + x)^2} + \frac{1}{G_{1y} + y} + \frac{1}{G_{2y} - y} \right].$$

Дивлячись на вирази (5.12) можна побачити, що зміщення у напрямку x призведуть також до змін сили в напрямку y . Для деяких застосувань, таких як мікромеханічні гіроскопи із гребінчастим приводом і з подвійно загнутим підвісом інерційної маси, це може спричинити значний ухил.

Що ще важливо відмітити, так це відсутність довжини перекриття L_0 у виразі (5.11). Це означає, що діюча сила не залежить від довжини перекриття, тоді як вона все ще присутня на боці похідних сили (5.12). З цієї точки зору, введення перекриття зменшує вплив первинних коливань на рух маси (квадратурна похибка).

Розглянемо тепер силу в напрямку x для гребінчастого приводу із нелінійною ємністю. Для малих переміщень в напрямку x , похідні в (5.11) можна апроксимувати лінійними залежностями

$$\begin{aligned}\frac{dC_1}{dx} &\approx nH\varepsilon\varepsilon_0(a_0 + a_1x), \\ \frac{dC_2}{dx} &\approx -nH\varepsilon\varepsilon_0(a_0 - a_1x).\end{aligned}\tag{5.13}$$

Тут коефіцієнти a_0 і a_1 задаються наступними виразами:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{B_1}{G_{1x}^2} + \frac{B_2}{G_{2x}^2} + \frac{1}{G_{1y} + y} + \frac{1}{G_{2y} - y}, \\ a_1 &= 2\left(\frac{B_1}{G_{1x}^3} + \frac{B_2}{G_{2x}^3}\right).\end{aligned}$$

Таким чином, результуюча сила, що діє на масу у випадку гармонічного збудження, зважаючи на (5.13), буде

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{nHV^2\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left[(a_0 + a_1x)(\delta V - \sin(\omega t + \varphi))^2 - \right. \\ &\quad \left. - (a_0 - a_1x)(\delta V - \sin(\omega t))^2\right]\end{aligned}\tag{5.14}$$

Результати аналізу ефективності нелінійного гребінчастого приводу подібні до розглянутих вище. Графік на рис. 5.9 демонструє точність апроксимації (5.13) у порівнянні із більш точними виразами (5.11), що стосується суми похідних від ємностей для обох гребінчастих приводів.

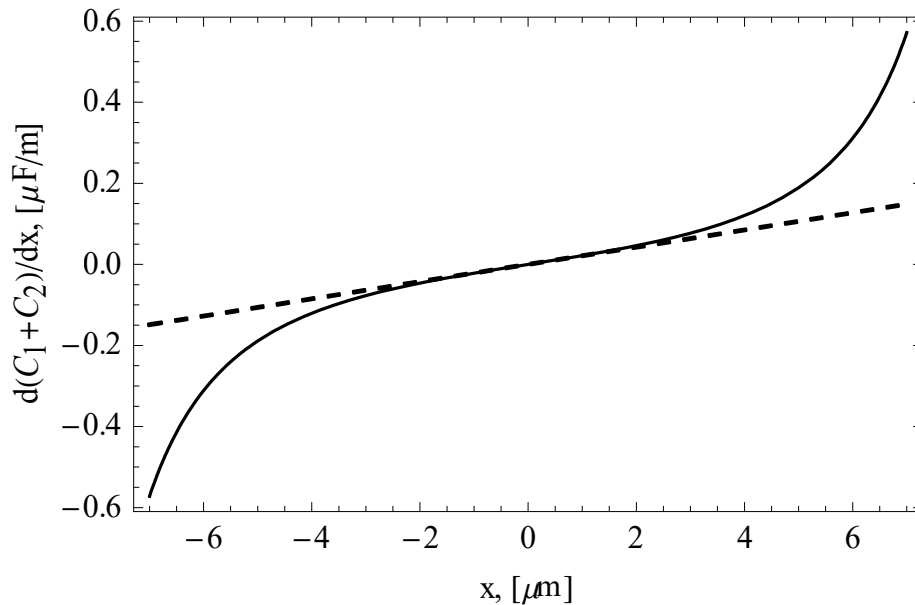


Рис. 5.9. Апроксимація похідних від ємності
(суцільна – нелінійна похідна, пунктирна – лінійна апроксимація)

Можна напевно відмітити, що точність лінійної апроксимації є цілком обмеженою відносно малими переміщеннями.

Знову має місце два оптимальні способи з таким же фазовим зсувом. Для «ухиленого» способу збудження

$$F_x = nHV^2 \varepsilon \varepsilon_0 [2a_0 \delta V \sin(\omega t) + a_1 (\delta V^2 + \sin^2(\omega t))x], \quad (5.15)$$

і для «заземленого» способу

$$F_x = \frac{nHV^2 \varepsilon \varepsilon_0}{2} [a_1 x + a_0 \cos(2\omega t)]. \quad (5.16)$$

Треба відмітити, що для зміщеного збудження із великим відношенням напруг δV нелінійність ємностей спричинить значний зсув парціальної частоти, чим неможна знехтувати для деяких застосувань. Для того, щоб зменшити вплив нелінійних ефектів, важливо збільшити проміжки в напрямку x у порівнянні з відповідними переміщеннями.

Вплив нелінійностей на частоту первинних коливань

Лінійна в термінах переміщення x сила суттєво впливає на парціальну частоту первинних коливань, на якій, зазвичай, збуджуються ці коливання. Для «заземленого» способу сили, заданої (5.16), парціальна частота отримує такий постійний зсув

$$k_* = \sqrt{k^2 - \frac{nHV^2 \epsilon \epsilon_0 a_1}{2m}}, \quad (5.17)$$

де k є початковою парціальною частотою, пов'язаною із коефіцієнтом жорсткості пружного підвісу, m є масою чутливого елемента. Справжня сила, що діє на чутливий елемент, показана на рис. 5.10.

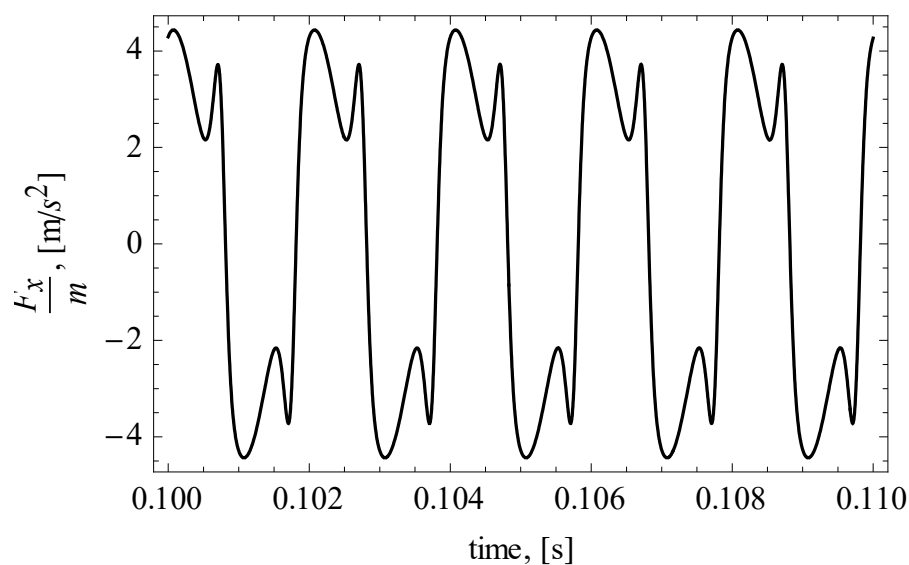


Рис. 5.10. Сила, що діє на чутливий елемент в «заземленому» режимі

У випадку сили за «ухиленим» способом (5.15), парціальна частота буде змінною в часі:

$$k_* = \left[k^2 - \frac{nHV^2 \epsilon \epsilon_0 a_1}{m} (\delta V^2 + \sin^2(\omega t)) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.18)$$

Вплив напруги зміщення на власну (або парціальну) частоту первинних коливань можна також побачити експериментально. На рис. 5.11 показано експериментально отримані амплітудні характеристики коливальної системи із гребінчастим двигуном при різних напругах зміщення.

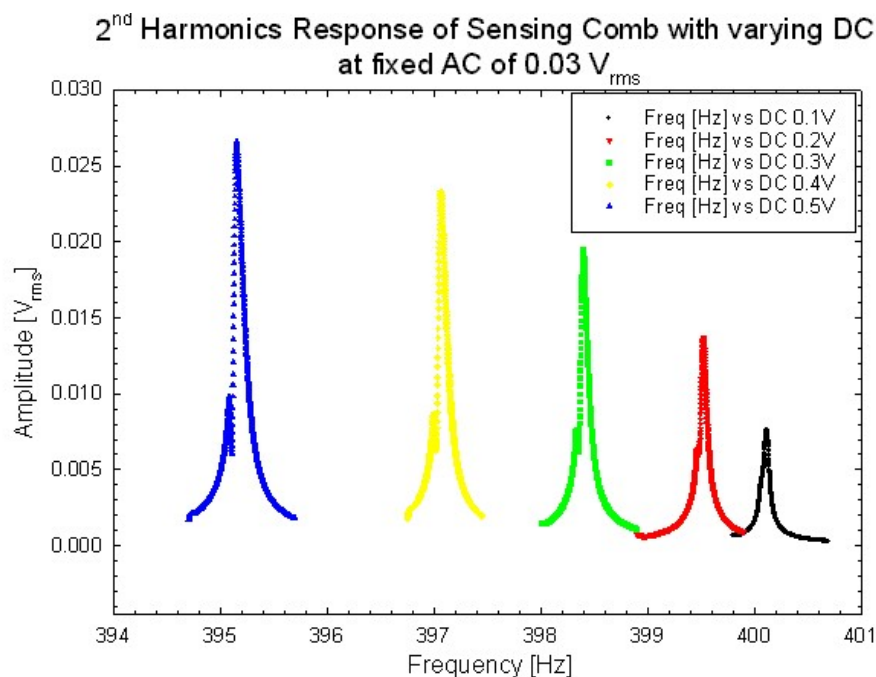


Рис. 5.11. Амплітудні відгуки при різних напругах зміщення, отримані експериментально

Очевидно, що при збільшенні напруги зміщення, власна частота збуджених коливань буде зменшуватися у відповідності до (5.18). На рис. 5.12

показано розраховані за (5.18) значення власної частоти, на які накладено експериментально виміряні власні частоти з рис. 5.11.

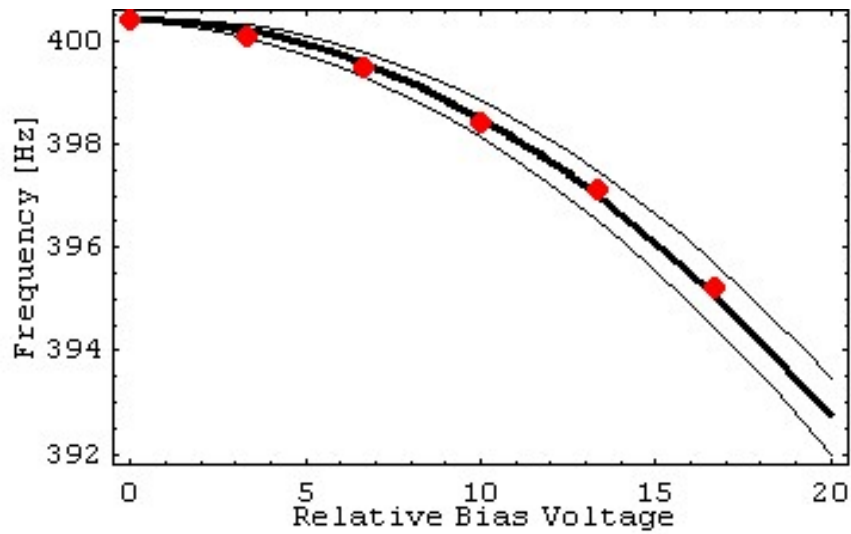


Рис. 5.12. Резонансна частота (Frequency) як функція відносної напруги зміщення δV (Relative Bias Voltage)

Справжня сила при суттєво нелінійному способі для «ухиленого» способу збудження показана на рис. 5.13.

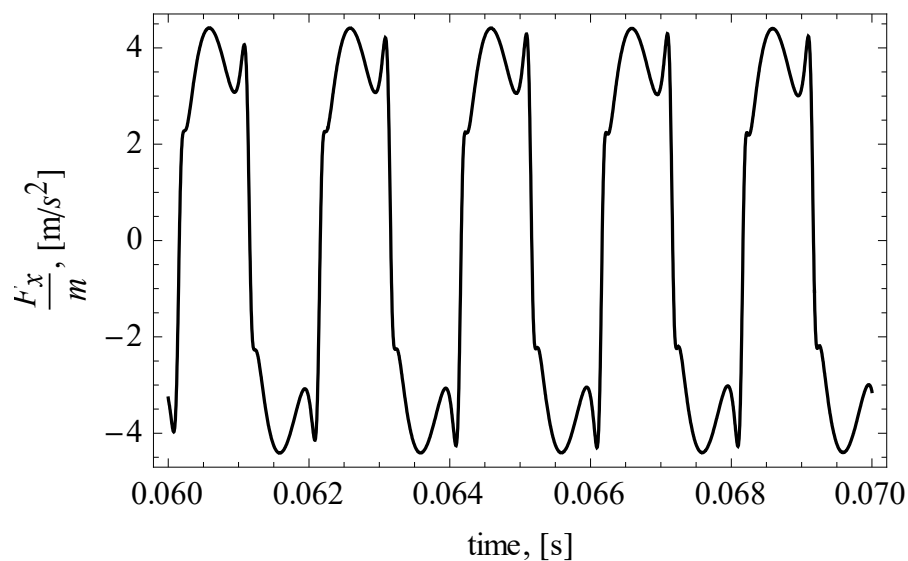


Рис. 5.13. Сила, що діє на чутливий елемент в зміщеному режимі

Хоча сили на рисунках 5.10 і 5.13 далекі від того, щоб бути гармонічними, після того, як вони прикладені до системи «пружина-маса-демпфер» чутливого елемента, коливання, що виникають в результаті, не є такими, що дуже відрізняються від гармонічної форми. Це є результатом природних фільтруючих властивостей осцилятора. Однак, якщо бажано мати майже ідеальне гармонічне збудження, проміжки між кінчиками гребінки G_{ix} треба вибрати в 3-5 разів ширшими ніж очікувана амплітуда первинних коливань, а частота збурення повинна бути відрегульована відповідно до (5.17) і (5.18).

Розроблені вище математичні моделі системи збудження, побудованої на гребінчастому приводі, дозволяють робити аналітичний аналіз динаміки мікромеханічних гіроскопів без необхідності у числових моделюваннях, поглинаючих багато часу.

5.2 Масштабний коефіцієнт та його нелінійність

Після вивчення того, як забезпечити гармонічне збудження первинної коливань чутливого елемента, розглянемо первинні і вторинні коливання, та їх базові характеристики, що впливають на якість вимірювання.

Вплив кутової швидкості на первинні коливання

Перш за все необхідно зазначити, що вплив кутової швидкості на стабільність первинних коливань є незначним і зазвичай їм знехтують. Тим не менш, при великих кутових швидкостях він може набувати досить значного впливу на стабільність роботи коріолісового вібраційного гіроскопа. Нагадаємо, що амплітуда первинних коливань (3.15) має наступний вигляд:

$$A_{10} = \frac{q_{10} k^2 \sqrt{(\delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2)^2 + 4 \zeta_2^2 \delta k^2 \delta \omega^2}}{|\Delta|} \quad (5.19)$$

де піднесений в квадрат знаменник є

$$|\Delta|^2 = k^8 \left[(1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)(\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) - \delta\omega^2 (g_1 g_2 \delta\Omega^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \delta k) \right]^2 + 4k^8 \delta\omega^2 \left[\zeta_1 (\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) + \zeta_2 \delta k (1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) \right]^2.$$

Графік залежності амплітуди (5.19) від відносної кутової швидкості для різних значень відносного демпфування показано на рис. 5.14 ($k = 1000 \text{ Hz}$, $\delta k = 1$, $\delta\omega = 1$).

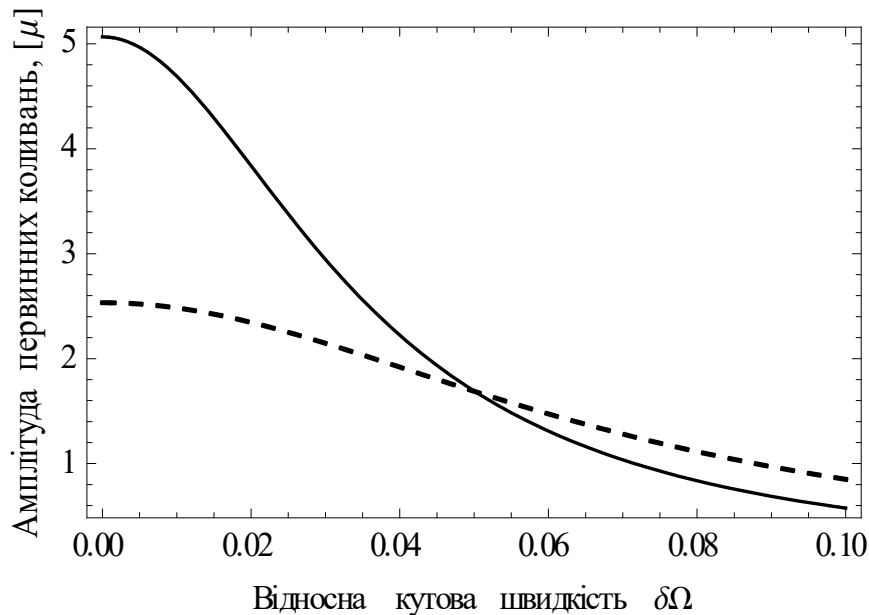


Рис. 5.14. Амплітуда первинних коливань, як функція великої відносної кутової швидкості (суцільна - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, переривчаста - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.05$)

З графіків на рис. 5.14 неважко бачити, що при підвищенні демпфування залежність амплітуди первинних коливань від зовнішньої кутової швидкості зменшується разом із зменшенням самої величини цієї амплітуди. При цьому залежність від кутової швидкості виглядає досить суттєвою. Але треба зазначити, що значення відносної кутової швидкості на рис. 5.14 є досить великими і при практичному застосуванні дуже рідко виникає необхідність

вимірювання таких великих відносних швидкостей. На рис. 5.15 показана така сама залежність, але у на порядок меншому діапазоні кутових швидкостей.

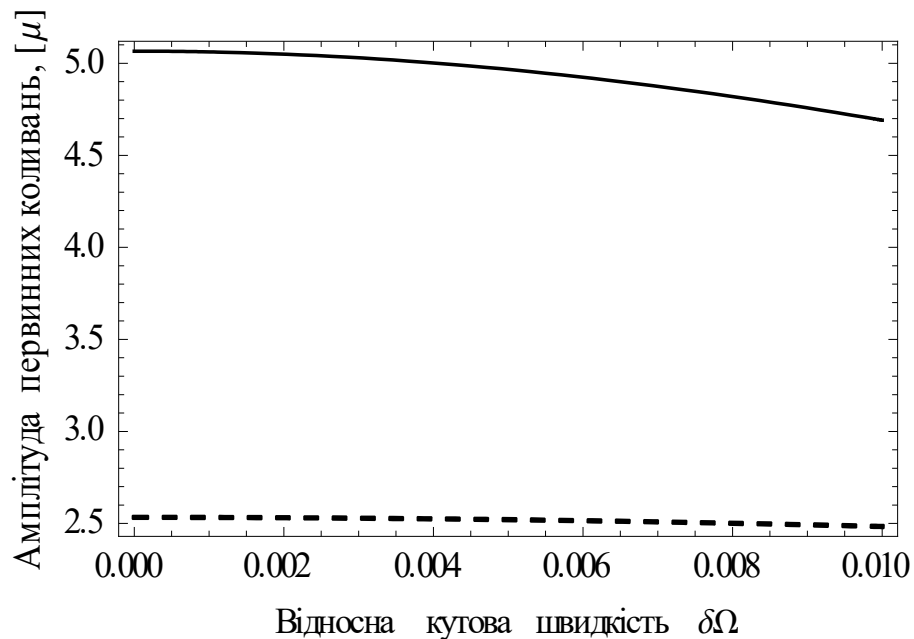


Рис. 5.15. Амплітуда первинних коливань, як функція невеликої відносної кутової швидкості (суцільна - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, переривчаста - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.05$)

Для невеликих відносних кутових швидкостей залежність від неї амплітуди первинних коливань є також невеликою, і нею можна знехтувати у подальших дослідженнях.

Вплив кутової швидкості на вторинні коливання

Коли первинні коливання встановилися і відбуваються із постійною амплітудою, вони забезпечують несучий сигнал, який буде модулюватись зовнішньою кутовою швидкістю для того, щоб виникли вторинні коливання. Як випливає з (3.15), амплітуда вторинних коливань зв'язана із кутовою швидкістю:

$$A_{20} = \frac{g_2 q_{10} \delta \omega}{|\Delta|} \delta \Omega \quad (5.20)$$

де квадрат знаменника має таких самих вигляд, як і в (5.19):

$$\begin{aligned} |\Delta|^2 = & k^8 [(1 - d_1 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2)(\delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2) \\ & - \delta \omega^2 (g_1 g_2 \delta \Omega^2 + 4 \zeta_1 \zeta_2 \delta k)]^2 \\ & + 4k^8 \delta \omega^2 [\zeta_1 (\delta k^2 - d_2 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2) + \zeta_2 \delta k (1 - d_1 \delta \Omega^2 - \delta \omega^2)]^2. \end{aligned}$$

Можна відмітити, що хоча амплітуда вторинних коливань A_{20} здається лінійно зв'язаною із кутовою швидкістю, насправді це не так. Кутова швидкість є також присутньою у виразі знаменника в $|\Delta|$. Поки ця нелінійність є незначною для малих кутових швидкостей, вона починає обмежувати діапазон вимірювань у випадку великих кутових швидкостей.

Графік вторинної амплітуди як функції кутової швидкості показаний на рис. 5.16 ($k = 1000 \text{ Hz}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, $\delta k = 1$, $\delta \omega = 1$).

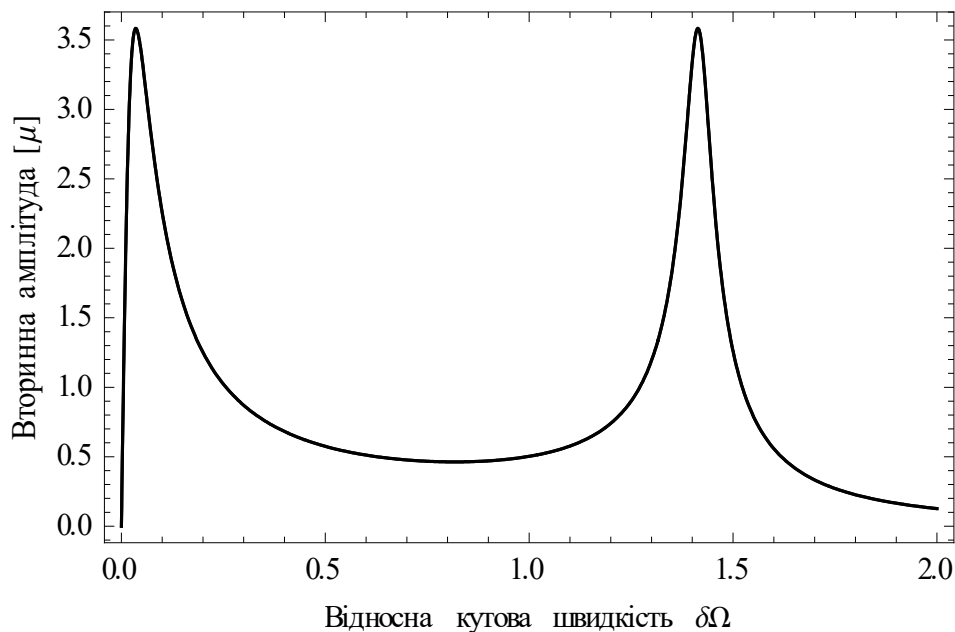


Рис. 5.16. Вторинна амплітуда як функція кутової швидкості

Вибраний на рис. 5.16 діапазон кутових швидкостей є надзвичайно широким і не має практичного значення (пам'ятаємо, що кутова швидкість є безрозмірною і пов'язаною з первинною парціальною частотою). Однак, цей рисунок демонструє наскільки нелінійною є насправді ця залежність. Ясно, що вторинна амплітуда A_{20} близька до того, щоб бути лінійно зв'язаною із кутовою швидкістю тільки для дуже малих кутових швидкостей ($\delta\Omega \ll 0.05$ як для випадку на рис. 5.16). Це продемонстровано на рис. 5.17.

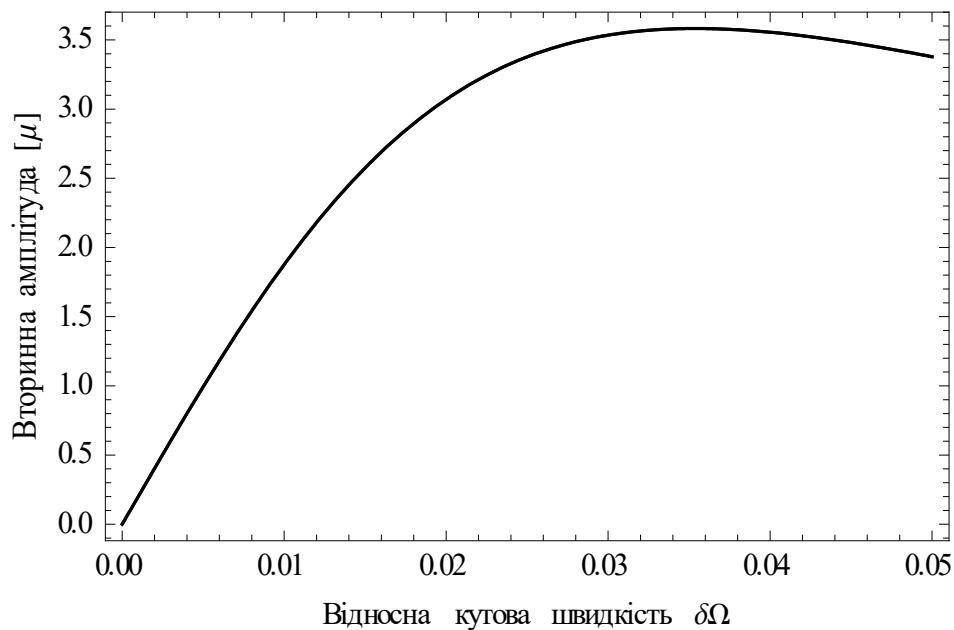


Рис. 5.17. Вторинна амплітуда для малих кутових швидкостей

Масштабний коефіцієнт

Для того, щоб побудувати успішний датчик кутової швидкості, треба, щоб цей відгук був настільки лінійний, наскільки це можливо. В ідеальному випадку він повинен бути зв'язаним із зовнішньою кутовою швидкістю як

$$A_{20}^* = S_{\Omega} \cdot \Omega, \quad (5.21)$$

де A_{20}^* є ідеальним виходом КВГ, а S_Ω є масштабним коефіцієнтом, який в цьому випадку співвідносить кутову швидкість до ідеальної вторинної амплітуди, і є постійним та залежить тільки від параметрів конструювання чутливого елемента.

Проте, поглянувши на вираз (5.20) ясно, що справжній масштабний коефіцієнт також залежить від кутової швидкості. Ідеальний масштабний коефіцієнт можна отримати із виразу (5.20) як дотичну до справжньої залежності вторинної амплітуди, взяту при нульовій кутовій швидкості як

$$S_\Omega = \left. \frac{\partial A_{20}}{\partial \Omega} \right|_{\Omega \rightarrow 0} = \frac{g_2 q_{10} \delta \omega}{k^3 \sqrt{[(1 - \delta \omega^2)^2 + 4\zeta_1^2 \delta \omega^2] [(\delta k^2 - \delta \omega^2)^2 + 4\zeta_2^2 \delta \omega^2 \delta k^2]}} \quad (5.22)$$

Масштабний коефіцієнт (5.22) описує, наскільки чутливим є КВГ до кутової швидкості. Чим більшим є масштабний коефіцієнт, тим КВГ є більш чутливим до кутової швидкості. Аналізуючи (5.22) можна побачити, що масштабний коефіцієнт залежить від таких параметрів чутливого елемента як відношення парціальних частот δk і відносна частота збудження $\delta \omega$. Залежність масштабного коефіцієнта від цих параметрів показана на рис. 5.18.

Чим світлішим є колір на рисунку, тим більшим є масштабний коефіцієнт. Очевидно, що максимальний масштабний коефіцієнт досягається, коли всі частоти є ідеально збігаються, наприклад, $\delta k = 1$ і $\delta \omega = 1$.

Можна також ясно побачити два напрямки на рис. 5.18, вздовж яких чутливість є менш залежною від варіацій параметрів: $\delta \omega = 1$ і $\delta \omega = \delta k$. Переріза поверхні з рис. 5.14 вздовж цих двох напрямків показані на рис. 5.19.

Крім того, беручи до уваги куб первинної парціальної частоти k^3 у знаменнику (5.22), є очевидним, що для кращої чутливості парціальна частота первинних коливань повинна бути якомога низькою. З іншого боку, незважаючи на це, зниження первинної парціальної частоти також зменшує діапазон вимірювань через нелінійність, як показано на рис. 5.17.

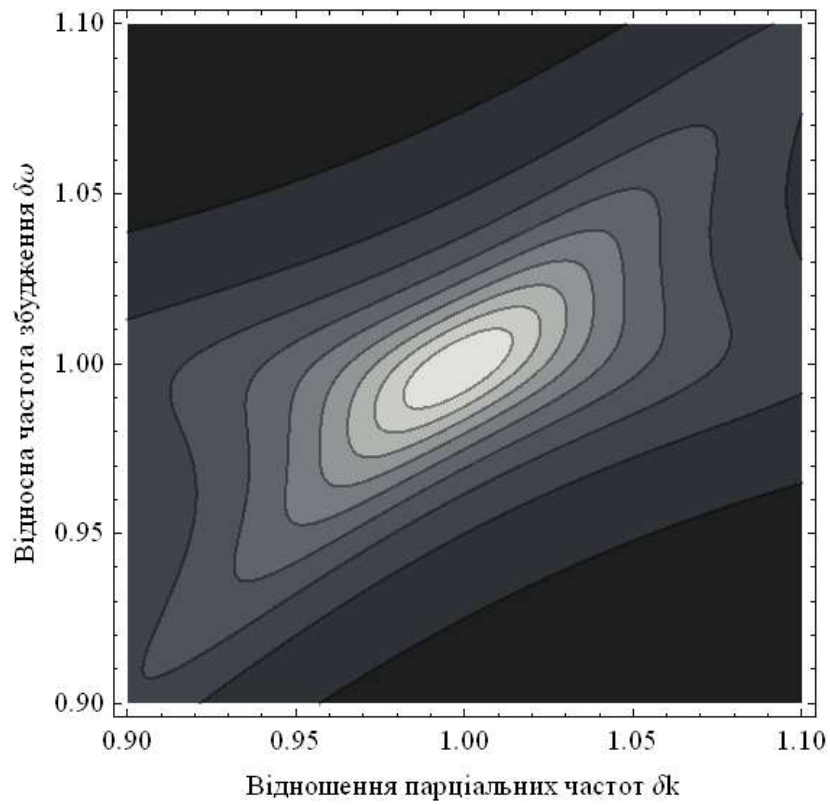


Рис. 5.18. Масштабний коефіцієнт КВГ як функція конструктивних параметрів

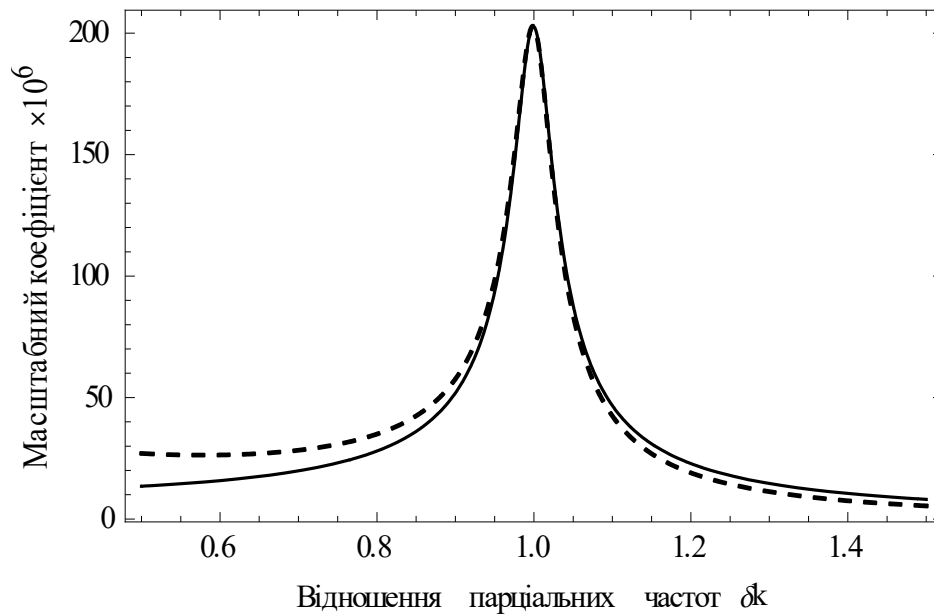


Рис. 5.19. Масштабний коефіцієнт як функція відношення парціальних частот δk (суцільна - $\delta\omega = 1$, пунктирна - $\delta\omega = \delta k$)

Нелінійність масштабного коефіцієнту

Для того, щоб оцінити належним чином нелінійність масштабного коефіцієнта, введемо безрозмірний коефіцієнт нелінійності як

$$L = 1 - \frac{A_{20}}{A_{20}^*}. \quad (5.23)$$

Графік коефіцієнта нелінійності (5.23), виражений у відсотках, як функція відносної кутової швидкості, показаний на рис. 5.20.

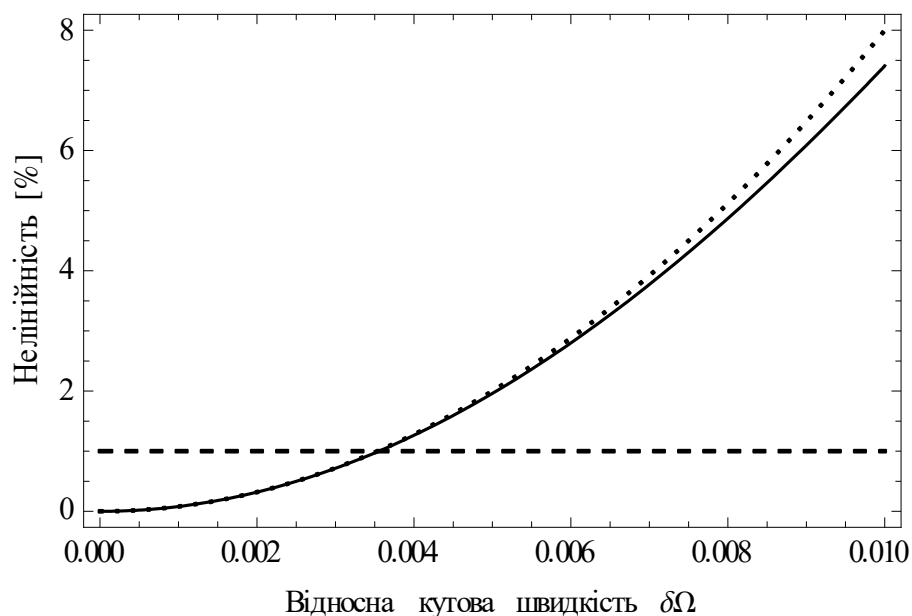


Рис. 5.20. Нелінійність масштабного коефіцієнту як функція кутової швидкості (суцільна – нелінійний коефіцієнт, крапкова - апроксимація, пунктирна лінія відповідає 1% нелінійності)

Приймаючи певну максимально прийнятну величину для нелінійності (5.23), можливо знайти таку кутову швидкість, за якої ця нелінійність досягається. Наступний апроксимований вираз може використовуватись для обчислення цієї відносної кутової швидкості:

$$\delta\Omega^* = \left\{ \frac{L_0 [(\delta k^2 - \delta\omega^2)^2 + 4\delta k^2 \delta\omega^2 \zeta_2^2] \cdot [(1 - \delta\omega^2)^2 + 4\delta\omega^2 \zeta_1^2]}{(\delta\omega^2 - 1)D_0 + 4\delta\omega^2 [g_1 g_2 \delta k \delta\omega^2 \zeta_1 \zeta_2 - d_1 \zeta_1^2 (\delta k^2 - \delta\omega^2)]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.24)$$

Тут

$$D_0 = (\delta k^2 - \delta\omega^2) (d_1 + d_2 \delta k^2 - (d_1 + d_2 - g_1 g_2) \delta\omega^2) + 4d_2 \delta k^2 \delta\omega^2 \zeta_2^2,$$

а L_0 є припустимий рівень нелінійності.

Вираз (5.24) можна далі спростити, якщо привод з'являється на первинній парціальній частоті, наприклад, $\delta\omega = 1$:

$$\delta\Omega^* = \left\{ \frac{L_0 \zeta_2 [1 + \delta k^4 - 2\delta k^2 (1 - 2\zeta_1^2)]}{g_1 g_2 \delta k \zeta_1 - d_1 \zeta_2 (\delta k^2 - 1)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.25)$$

Таким чином, коли вибрано допустимий рівень нелінійності разом із діапазоном вимірювань, тоді можна обчислити мінімально можливу первинну парціальну частоту, використовуючи (5.24) або (5.25), наступним чином:

$$k_{\min} = \frac{\Omega_{\max}}{\delta\Omega^*}. \quad (5.26)$$

Наприклад, якщо $L_\Omega = 0.01$ (або 1%) і $\Omega_{\max} = 1\text{Hz}$, тоді мінімальне значення для парціальної частоти первинних коливань буде $k_{\min} \approx 281\text{Hz}$. Хоча це значення є відносно низьким, маючи на увазі, що нижня межа буде, насправді, визначатися іншими факторами, але, незважаючи на це, немає причини конструювати чутливий елемент КВГ із вищою первинною частотою, оскільки це зменшує його чутливість.

5.3 Роздільна здатність і динамічний діапазон

Існує багато різних методів, що використовуються для детектування вторинних переміщень інерційної маси. Посеред них є ємнісні, п'езорезистивні,

п'єзоелектричні, магнітні, оптичні, і т. д. Зайве казати, що найпростішим для реалізації і найбільш широко поширеним посеред мікромеханічних приладів є, звичайно, ємнісні. Припускаючи, що використовується ємнісна детекція вторинних коливань, *роздільну здатність* коріолісового вібраційного гіроскопа можна отримати за допомогою заданих змін мінімальної ємності, які система в змозі виявити. Позначимо цю мінімальну зміну ємності як ΔC_{\min} . Оскільки ємність C є функцією переміщення x інерційної маси, можна записати

$$C(x) = C(0) + \frac{\partial C(0)}{\partial x} x + O(x^2). \quad (5.27)$$

Для малих переміщень x , що справджується для вторинних коливань, можна знехтувати $O(x^2)$ -членами, і зміна ємності буде задаватись як

$$\Delta C(x) = C(x) - C(0) \approx \frac{dC(0)}{dx} x. \quad (5.28)$$

У випадку диференційного вимірювання, що є доволі звичним в вимірюваннях ємності, результуюча зміна ємності продукується відніманням двох окремо виміряних ємностей C_1 і C_2 наступним чином:

$$\Delta C(x) = C_1(x) - C_2(x) \approx 2 \frac{dC(0)}{dx} x. \quad (5.29)$$

Зміна в ємності двох паралельних провідних пластинок, яка, наприклад, викликана переміщеннями інерційної маси у випадку диференційного вимірювання (5.29), може бути обчислена так:

$$\Delta C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{x_0 - x} - \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{x_0 + x} \approx 2 \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{x_0^2} x. \quad (5.30)$$

Тут x_0 є базовим зазором між електродами, x є переміщенням електродів, S є площею перекриття, ϵ є відносною діелектричною константою оточення

інерційної маси і ε_0 є абсолютною діелектричною константою вакууму. Зсув електродів, викликаний кутовою швидкістю $\Delta\Omega$, задається так

$$x = r_0 S_\Omega \Delta\Omega, \quad (5.31)$$

де S_Ω визначається виразом (5.22), r_0 є відстанню від осі обертання до центру електрода для обертального чутливого елемента і одиницею для поступального чутливого елемента.

Таким чином, об'єднуючи рівняння (5.29) і (5.30), можна отримати роздільну здатність для коріолісового вібраційного гіроскопа із ємнісною системою реєстрації вторинних коливань, що визначаються як

$$\Delta\Omega_{\min} = \frac{\Delta C_{\min} k^3 \sqrt{\left((\delta k^2 - \delta\omega^2)^2 + 4\delta k^2 \delta\omega^2 \zeta_2^2\right) \left((1 - \delta\omega^2)^2 + 4\delta\omega^2 \zeta_1^2\right)}}{2 \frac{dC(0)}{dx} r_0 g_1 q_2 \delta\omega}. \quad (5.32)$$

Тут найкраще розділення відповідає мінімальному $\Delta\Omega_{\min}$. Зазначимо, що формула (5.32) представляє розділення з ємнісним диференціальним вимірюванням. Однак, така ж процедура може застосовуватись для будь-якого принципу вимірювання, використовуючи вираз (5.21) для масштабного коефіцієнта. Роздільна здатність, що задана формулою (5.30), зв'язана із динамікою чутливого елемента і є фундаментальною з точки зору конструювання. Дійсна роздільна здатність гіроскопа не може бути краще, ніж та, що визначається динамікою його чутливого елемента. На жаль, роздільна здатність може бути гіршою, оскільки на неї також впливають шуми.

Лише роздільна здатність не могла б дати користувачу повне розуміння вимірювальних можливостей КВГ, оскільки вона тісно пов'язане із діапазоном вимірювання. Така ж сама роздільна здатність із різними діапазонами вимірювання буде відповідати гіроскопам із зовсім різними якостями. Тому інша характеристика, що широко використовується для опису вимірювальних можливостей датчиків, є динамічний діапазон, який у випадку датчика кутової швидкості визначається наступним чином:

$$R = 20 \log_{10} \frac{\Omega_{\max} - \Delta\Omega_{\min}}{\Delta\Omega_{\min}}. \quad (5.33)$$

Тут динамічний діапазон R виражається в децибелах, $\Delta\Omega_{\min}$ задається виразом (5.32), за припущення, що поріг датчика дорівнює його роздільній здатності, Ω_{\max} є максимальною кутовою швидкістю, яка може вимірюватись з прийнятними похибками, і яка може обчислюватись із (5.26) як

$$\Omega_{\max} = \delta\Omega^* k, \quad (5.34)$$

де k є парціальною частотою первинних коливань. Графічне зображення динамічного діапазону як функції первинної парціальної частоти показано на рис. 5.21.

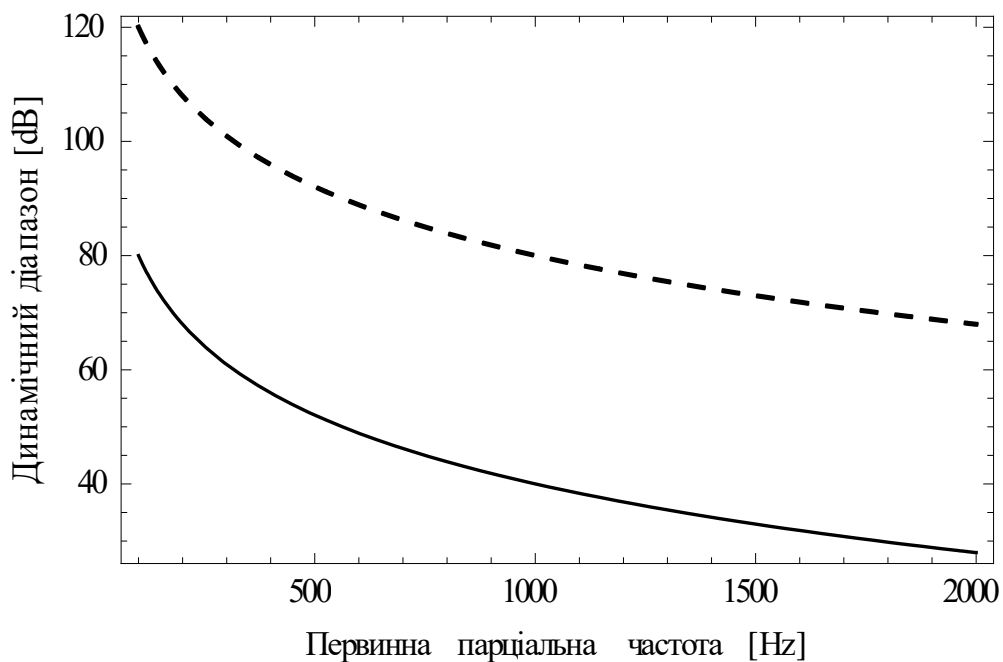


Рис. 5.21. Динамічний діапазон як функція первинної парціальної частоти (суцільна - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, пунктирна - $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.0025$, $\delta\omega = \delta k = 1$)

Дивлячись на рис. 5.21, можна побачити, що чим нижче первинна парціальна частота, тим більшим буде динамічний діапазон КВГ. Зайве казати, що для будь-якого прийняттого затребуваного динамічного діапазону відповідний чутливий елемент може бути сконструйований навіть без вакуумного пакування (суцільна лінія на рис. 5.21).

Незважаючи на цей очевидний факт, на мікромеханічні КВГ, наприклад, все ще посилаються, як на низькосортні датчики кутової швидкості. Причиною цього є як застосування технологій мікроелектроніки для виробництва гіроскопів, так і підхід до розвитку «мініатюрних» датчиків взагалі. Як тільки конструктори намагаються розробляти «мікромеханічний» гіроскоп, вони роблять його надзвичайно малим за розміром, у порівнянні з традиційними датчиками кутової швидкості. Повний розмір чутливого елемента в кожному з напрямків змінюється від 100 до 5000 мікрметрів. Як результат, парціальна частота первинних коливань може бути в діапазоні від 5 до 100 кГц. Безсумнівно, для того, щоб зробити будь-яке, не обов'язково високоякісне, вимірювання кутової швидкості з такими приладами, є необхідним надзвичайно високе вакуумне пакування. З іншого боку, якщо хтось спробує сконструювати гіроскоп з низькою первинною частотою, це потребуватиме зробити величезною інерційну масу і дуже тонкі і довгі пружини пружного підвісу. Це досить складна задача, якщо застосовуються технології мікроелектроніки, особливо з огляду на дуже високі відносні допуски цього виробничого процесу.

5.4 Зсув нуля

Зсув нуля в коріолісових вібраційних гіроскопах може бути результатом дії багатьох різних факторів. Розглянемо джерела зсуву, які пов'язані з чутливим елементом і його динамікою. Одним із них є вібрація на частоті збудження. Інтерференція вібрацій на інших частотах буде малою і може бути відфільтрованою. Ясно, що для поступальних гіроскопів тільки поступальна вібрація буде мати ефект, а для обертальних гіроскопів тільки кутові вібрації

будуть доречними. Отже, у випадку вібрацій на робочій частоті, рівняння руху чутливого елемента будуть

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega_3^2)x_1 + g_1\Omega_3\dot{x}_2 = q_1(t) + w_1(t), \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega_3^2)x_2 - g_2\Omega_3\dot{x}_1 = w_2(t). \end{cases} \quad (5.35)$$

Тут $w_1(t)$ і $w_2(t)$ є складовими вектора прискорення, які представляють рух базової системи координат. Подаючи вібрації як

$$w_i = w_{i0} \cos(\omega t),$$

можна отримати розв'язок для амплітуди вторинних коливань у безрозмірній формі

$$A_{w_2} = \frac{g_2 q_1 \delta\omega \delta\Omega + \sqrt{w_{20}^2 (1 - \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)^2 + \delta\omega^2 (2\zeta_1 w_{20} + g_2 \delta\Omega w_{10})^2}}{k^2 \Delta}. \quad (5.36)$$

Якщо позначити амплітуду без вібрацій через A_{20} , яка задана (5.22), тоді відносна похибка, спричинена вібрацією на частоті збудження, задається так

$$\begin{aligned} \delta A_w &= \frac{A_{w_2} - A_{20}}{A_{20}} \\ &= \frac{\sqrt{w_{20}^2 (1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)^2 + \delta\omega^2 (2\zeta_1 w_{20} + g_2 \delta\Omega w_{10})^2}}{g_2 q_1 \delta\omega \delta\Omega}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Зазначимо, що похибка, що виникає від вібрації, не залежить від співвідношення між парціальними частотами, але залежить від відносної частоти збудження первинних коливань. Ця залежність показана на рис. 5.22.

Легко можна довести, що мінімальне значення для цієї похибки, яке досягається на приводній частоті, яка є розв'язком наступного рівняння

$$1 - \delta\omega^2 - d_2 \delta\Omega^2 = 0 \Rightarrow \delta\omega = \sqrt{1 - d_2 \delta\Omega^2} \approx 1. \quad (5.38)$$

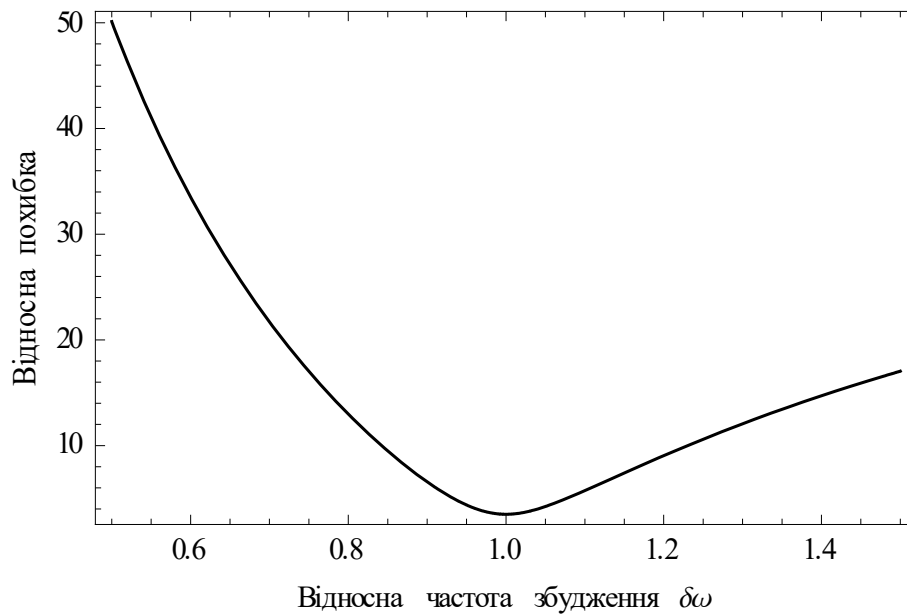


Рис. 5.22. Типова похибка від вібрацій як функція відносної частоти приводу
 $(\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025, q_{10} = w_1 = w_2 = 10, \delta\Omega = 0.01)$

Цей результат також підтверджує, що краще збуджувати первинні коливання на їхньому резонансі. З іншого боку, якщо можна отримати інформацію про зовнішні прискорення на робочій частоті, ухилення можна компенсувати, спираючись на залежність (5.37).

Іншим джерелом зсуву нуля є неспівпадіння осі пружності підвісу із віссю вимірювання, що відповідає пружному перехресному зв'язку. Це є найбільш типовим для поступальних чутливих елементів. Лінеаризовані рівняння руху в цьому випадку будуть такими

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 + g_1\Omega\dot{x}_2 - 2\theta\Delta\omega_1^2x_2 = q_1(t), \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 - g_2\Omega\dot{x}_1 + 2\theta\Delta\omega_2^2x_1 = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Тут θ є кутом між осями пружності і вимірювання,

$$\Delta\omega_2^2 = (c_2 - c_1)/2M_2,$$

$$\Delta\omega_1^2 = (c_1 - c_2)/2M_1,$$

де c_1 і c_2 є коефіцієнтами жорсткості, що відповідають первинним і вторинним коливанням відповідно, M_1 і M_2 є коефіцієнтами інерції, які для поступального руху дорівнюють

$$M_1 = m_1 + m_2,$$

$$M_2 = m_2,$$

а для обертального

$$M_1 = I_{11} + I_{22},$$

$$M_2 = I_{22}.$$

Амплітуда вторинних коливань в цьому випадку становитиме

$$A_{20} = \frac{q_{10} \sqrt{g_2^2 \delta\omega^2 \delta\Omega^2 + 4\theta^2 \delta\Delta\omega_2^4}}{\omega_0^2 \Delta_0}, \quad (5.40)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 = & [(\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2)(1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) \\ & - \delta\omega^2 (4\delta k \zeta_1 \zeta_2 + g_1 g_2 \delta\Omega^2)]^2 \\ & + 4\delta\omega^2 [\delta k \zeta_2 (1 - d_1 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) + \zeta_1 (\delta k^2 - d_2 \delta\Omega^2 - \delta\omega^2) \\ & - 2\delta\Omega\theta (\delta\Delta\omega_1^2 + \delta\Delta\omega_2^2)]^2. \end{aligned}$$

Ясно, що якщо $\theta = 0$, тоді немає похибки, що виникає через неспівпадіння вісей. Крім того, ця похибка також буде відсутньою у випадку, коли

$$\Delta\omega_2^2 = \frac{c_1 - c_2}{2m_2} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2. \quad (5.41)$$

Тут c_i є коефіцієнтами жорсткості пружного підвісу, а m_1 є ефективною масою вторинних коливань. До того ж, можна представити амплітуду (5.41) як суму двох складових, а саме, одну, що з'являється від кутової швидкості, та

іншу, викликану неспівпадінням. В цьому випадку можна визначити відносну похибку від такого неспівпадіння як

$$\delta A_{\theta} = \frac{A_{\theta}}{A_{20}} = \frac{\theta^2 \delta \Delta \omega_2^4}{g_2 \delta \omega^2 \delta \Omega^2}, (\Omega \neq 0). \quad (5.42)$$

З іншого боку, можна знайти прийнятний допуск для кута неспівпадіння θ_{\max} відносно заданого прийнятного зсуву нуля $\delta \Omega_{\max}$ і за умови відсутності обертання як

$$\theta_{\max} = \frac{\delta \Omega_{\max} \delta \omega}{\delta \Delta \omega_2^2}. \quad (5.43)$$

Формула (5.43) також дає нам кут неспівпадіння, якщо зсув є відомим. Ця величина може використовуватись для алгоритмічної компенсації зсуву нуля.

Узагальнений підхід до компенсації ухилення, спричиненого пружністю і демпфуванням, схожими на перехресний зв'язок, із застосуванням обробки сигналів, буде описано в наступній главі.

5.5 Динамічна похибка і смуга пропускання

За означенням, динамічною похибкою є похибка у вимірюваннях кутової швидкості через зміну останньої у часі. Для спрощення аналізу динамічної похибки, кутова швидкість зазвичай вважається гармонічною, наприклад, коливальною в часі із деякою частотою λ . Динамічна похибка КВГ може визначатись у термінах амплітудного і фазового відгуків на цю кутову швидкість. Вирази для цих відгуків виведені у попередній главі і є такими

$$A(\lambda) = \frac{q_{10} (d_4 \lambda + g_2 \omega)}{\sqrt{[(\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2)^2 + 4\zeta_2^2 \omega_2^2 (\lambda + \omega)^2][(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_1^2 \omega_1^2 \omega^2]}}, \quad (5.44)$$

$$\varphi(\lambda) = \tan^{-1} \left\{ \frac{[\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2][\omega_1^2 - \omega^2] - 4\omega_1 \omega_2 \zeta_1 \zeta_2 \omega (\lambda + \omega)}{2[\omega_2 \zeta_2 (\lambda + \omega)(\omega_1^2 - \omega^2) + \omega_1 \zeta_1 \omega (\omega_2^2 - (\lambda + \omega)^2)]} \right\}.$$

В ідеальному випадку амплітуда і фаза вторинних коливань для гармонічної кутової швидкості повинні бути тими ж самими, як і для постійної. Це дозволяє визначати динамічну похибку і для амплітуди і для фази наступним чином:

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{A(\delta\lambda)}{A(0)}, \\ E_\varphi &= \frac{\varphi(\delta\lambda)}{\varphi(0)}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Тут $\delta\lambda = \lambda / \omega_1$ є відносна частота коливань кутової швидкості. Похибки (5.45) є безрозмірними і дорівнюють одиниці в ідеальному випадку. Більш важливим є те, що динамічні похибки дозволяють визначити важливу характеристику КВГ, якою є *смуга пропускання*, як діапазон частот кутової швидкості, де динамічні похибки знаходяться у межах заданого допуску.

Давайте спочатку вивчимо фазову динамічну похибку. За винятком відносної частоти кутової швидкості, фазова динамічна похибка залежить від таких конструктивних параметрів чутливого елемента як відносна частота збудження $\delta\omega = \omega / \omega_1$, відношення парціальних частот $\delta k = \omega_2 / \omega_1$, відношенню коефіцієнтів демпфування $\delta\zeta = \zeta_1 / \zeta_2$, і коефіцієнт демпфування первинних коливань $\zeta = \zeta_1$. Як було показано раніше, корисним є збудження чутливого елемента на парціальній частоті первинних коливань ($\delta\omega = 1$). В цьому випадку графік фазової динамічної похибки для різних первинних коефіцієнтів демпфування показано на рис. 5.23.

Аналіз цього графіка наводить на думку, що хоча здається, що найкращим випадком є повна відсутність демпфування, наявність навіть малої кількості демпфування значно збільшує фазову динамічну похибку. В той же час, зростання демпфування змушує похибку наближатися до ідеального випадку.

Давайте тепер дослідимо амплітудну динамічну похибку. Підстановка амплітуди із (5.44) в (5.45) дає вираз для амплітудної динамічної похибки:

$$\begin{aligned}
E_A(\delta\lambda) = & \{(\delta\lambda + g_2\delta\omega)[(\delta k^2 - \delta\omega^2)^2 + 4\delta k^2\zeta^2\delta\zeta^2\delta\omega^2]^{1/2} \\
& \times [(1 - \delta\omega^2)^2 + 4\zeta^2\delta\omega^2]^{1/2}\} / \{g_2\delta\omega[(\delta k^2 - (\delta\lambda + \delta\omega)^2)^2 \\
& + 4\delta k^2\zeta^2\delta\zeta^2(\delta\lambda + \delta\omega)^2]^{1/2} [(1 - (\delta\lambda + \delta\omega)^2)^2 + 4\zeta^2(\delta\lambda + \delta\omega)^2]^{1/2}\}
\end{aligned} \quad (5.46)$$

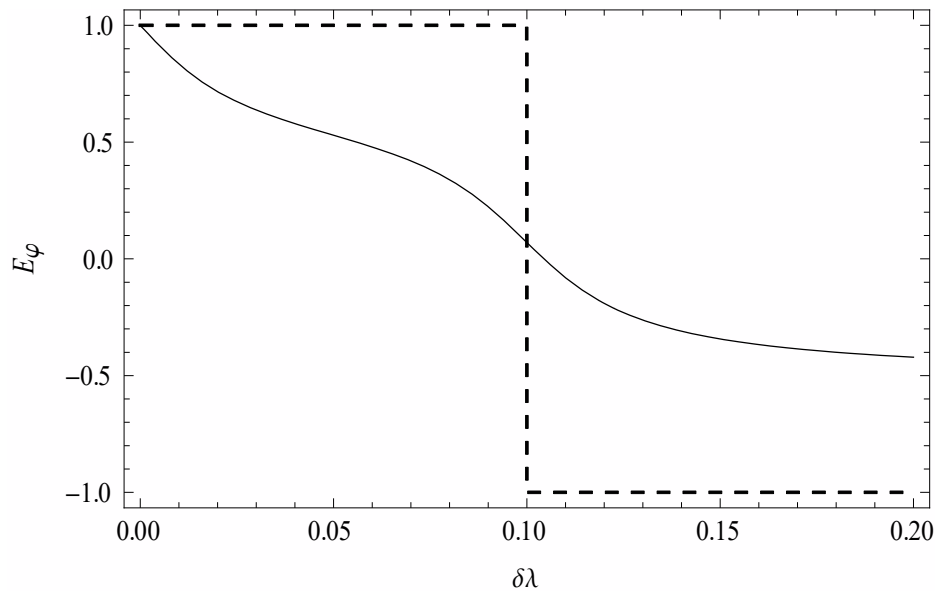


Рис. 5.23. Фазова динамічна похибка

(суцільна лінія - $\zeta = 0.02$, пунктирна лінія - $\zeta = 0$, $\delta k = 1.1$, $\delta\omega = 1$, $\delta\zeta = 1$)

Відмітимо, що амплітудна динамічна похибка, задана (5.46), не залежить явно від первинної парціальної частоти. Максимізація чутливості КВГ вимагає малої парціальної частоти первинних коливань, завдяки члену k^3 у знаменнику масштабного коефіцієнта (5.22). Забезпечення необхідної смуги частот датчика вимагає утримання амплітудної динамічної похибки якомога меншою (ідеально дорівнює одиниці) у межах цієї смуги частот. Графік амплітудної динамічної похибки як функції коефіцієнта демпфування ζ первинних коливань та відносної частоти кутової швидкості показано на рис. 5.24.

З цього графіка можна побачити, що зменшене демпфування має результатом значну динамічну похибку навіть для малих частот кутової

швидкості. З іншого боку, підвищене демпфування змушує зменшуватися провал між піками, таким чином надаючи низькі значення динамічній похибці.

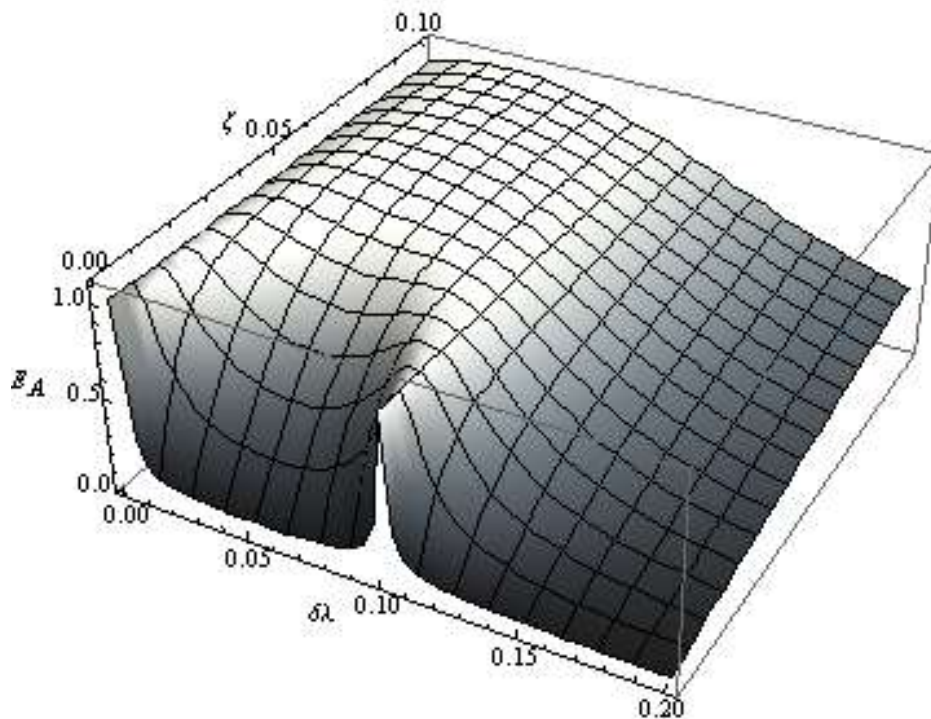


Рис. 5.24. Амплітудна динамічна похибка
($\delta k = 1.1$, $\delta \omega = 1$, $\delta \zeta = 1$)

Амплітудна динамічна похибка має два максимуму та один локальний мінімум в напрямку осі частоти кутової швидкості, що ясно видно на рис. 5.24, особливо у випадку низького демпфування. Положення цих екстремумів можна знайти із наступного рівняння:

$$\frac{d}{d(\delta\lambda)} E_A(\delta\lambda) = 0. \quad (5.47)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.47) є досить складним для аналізу. Однак, у випадку нульового демпфування воно може бути значно спрощене і його розв'язки можуть бути знайдені із наступного рівняння:

$$(\delta\lambda + \delta\omega)[1 + \delta k^2 - 2(\delta\lambda + \delta\omega)^2][\delta k^2 - (\delta\lambda + \delta\omega)^2][(\delta\lambda + \delta\omega)^2 - 1] = 0. \quad (5.48)$$

Трьома додатними коренями рівняння (5.48) є

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 &= 1 - \delta\omega, \\ \delta\lambda_2 &= \sqrt{\frac{1 + \delta k^2}{2}} - \delta\omega, \\ \delta\lambda_3 &= \delta k - \delta\omega. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Тут перший і останній корені відповідають максимумам, а другий – мінімуму.

У загальних виразах, оптимізація смуги частот означає надання того ж самого ідеального рівня амплітудної динамічної похибки кожному з трьох екстремумів в околиці заданих (5.49) частот кутової швидкості. Рівень амплітудної динамічної похибки на другому максимумі, який відповідає $\delta\lambda_3$, може контролюватися відношенням демпфування $\delta\zeta$, за умови, що воно є коренем наступного рівняння:

$$E_A(\delta\lambda_3) = 1. \quad (5.50)$$

Додатний розв'язок рівняння (5.50), припускаючи, що $\delta\omega = 1$, є

$$\begin{aligned} \delta\zeta &= (\delta k^2 - 1)(\delta k + g_2 - 1) / \delta k [g_2^2(\delta k^2 + \delta k^6 \\ &\quad - 4\zeta^2 + 2\delta k^4(2\zeta^2 - 1)) - 4\zeta^2(\delta k - 1)^2 - 8g_2\zeta^2(\delta k - 1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Тепер знайдемо демпфування ζ , яке задовольняє рівнянню

$$E_A(\delta\lambda_2) = 1, \quad (5.52)$$

де $\delta\zeta$ задане виразом (5.51). В цьому випадку рівняння (5.52) буде залежати тільки від відношення парціальних частот і невідомого демпфування ζ . Повний вираз для рівняння (5.52) є досить великим, щоб показати його тут, однак воно легко може бути розв'язаним чисельно. Графік амплітудної

динамічної похибки як функції демпфування ζ і відносно оптимального демпфуючого відношення (5.51) показаний на рис. 5.25.

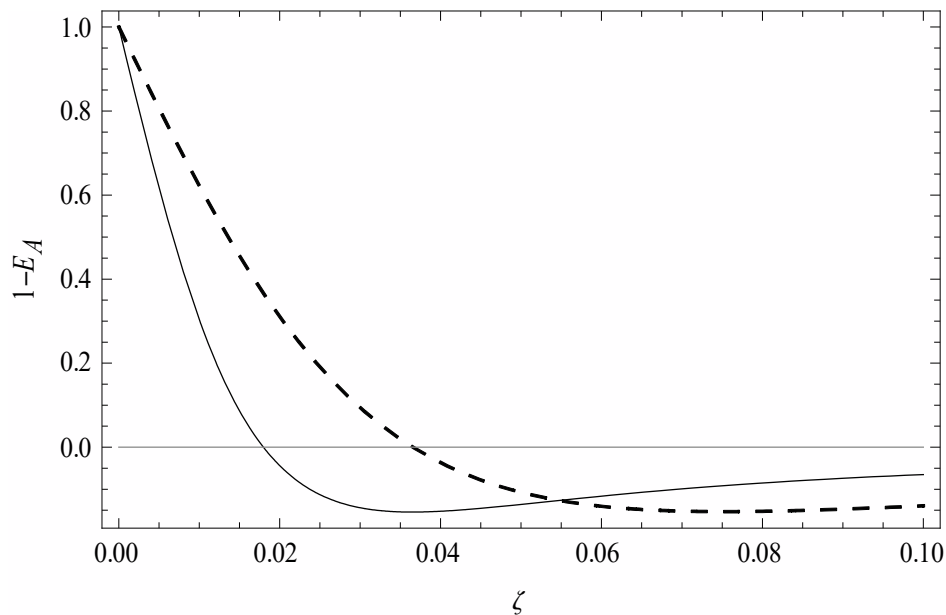


Рис. 5.25. Демпфування мінімальної динамічної похибки
(суцільна - $\delta k = 1.05$, пунктирна - $\delta k = 1.1$)

Наприклад, оптимальні параметри демпфування для $\delta k = 1.05$ є $\zeta = 0.018$, $\delta\zeta = 0.921$. Амплітудна динамічна похибка для цього випадку показана на рис. 5.26.

Можна також відмітити, що досягнутий рівень амплітудної динамічної похибки може бути і далі покращений, якщо об'єктивний рівень динамічної похибки в рівняннях (5.48) і (5.50) встановлений на $1-e$ замість 1, де e є прийнятне значення динамічної похибки (допуск динамічної похибки).

Базуючись на представленому вище аналізі динамічних похибок КВГ, необхідна смуга частот може бути досягнута шляхом належного вибору не тільки відношення парціальних частот, яке впливає на положення другого піку відповідно до (5.47), але й також забезпечуючи належне демпфування первинних і вторинних коливань.

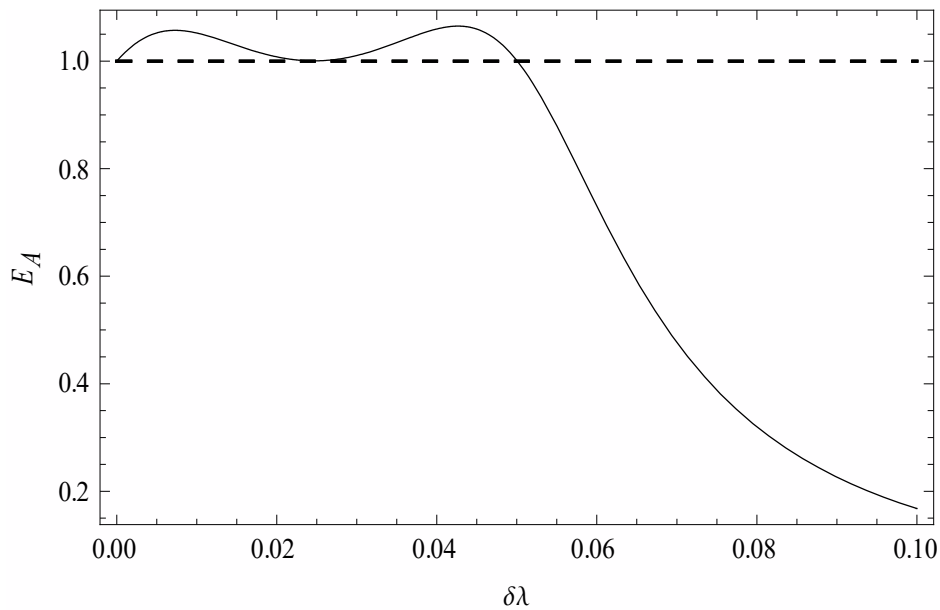


Рис. 5.26. Оптимізована амплітудна динамічна похибка

Для того, щоб забезпечити необхідну смугу частот, відношення парціальних частот повинно вибиратися, базуючись на положенні другого максимуму в амплітудному відгуку:

$$\delta k = \delta \lambda_* + \delta \omega. \quad (5.53)$$

Тут $\delta \lambda_*$ є потрібна смуга частот в безрозмірній формі, віднесена до парціальної частоти первинних коливань. Після того, як відношення парціальних частот обчислене за допомогою (5.53), результат використовується для обчислення необхідного демпфування для первинних коливань. Остання проблема може бути розв'язана або чисельно, або навіть аналітично для деяких спрощених випадків. Маючи тепер обчислене правильне частотне відношення і первинне демпфування, вторинне демпфування обчислюється із використанням співвідношення (5.51).

Розглядаючи той факт, що забезпечення необхідного демпфування в КВГ не є легкою задачею, оптимальні значення можна здійснити шляхом створення «електричного демпфування», використовуючи керування із замкненим зворотним зв'язком як для первинних, так і для вторинних коливань.

5.6 Автоматизоване проектування чутливого елемента

Як було показано в попередніх підрозділах цього розділу, для того, що спроектувати чутливий елемент коріолісового вібраційного гіроскопа із наперед заданими характеристиками необхідно мати можливість контролювати не тільки величину парціальної частоти первинних коливань, але також, що є навіть більш важливим, відношення парціальних частот первинних і вторинних коливань. А для цього необхідно мати можливість контролювати при проектуванні такі параметри чутливого елемента, як його інерційні характеристики (масу або моменти інерції) та геометричні характеристики пружних елементів підвісу. При проектування чутливого елемента за традиційними технологіями, спочатку розробляється його перше креслення, на основі якого проводиться розрахунок його базових геометричних характеристик, а потім вторинних механічних, такі як маса чи моменти інерції, частоти та їх відношення, тощо. Після цього, якщо отримані характеристики не відповідають бажаним, вносяться інтуїтивні корекції до конструкції чутливого елемента, і знову перераховуються всі його характеристики. Цей процес має ітеративний характер і може зайняти від декількох днів до декількох тижнів.

Для вирішення цих задач і підвищення ефективності проектування чутливих елементів мікромеханічних коріолісових вібраційних гіроскопів було розроблено спеціалізоване програмне забезпечення для їх автоматизованого проектування MG CAD, головний вид якого показано на рис. 5.27.

Ця програма дозволяє проектувати чутливий елемент із використанням таких складових, як інерційні елементи, елементи пружного підвісу та гребінчасті структури систем збудження та реєстрації рухів. Різні кольори на головному виді програми на рис. 5.27 відповідають елементам з різними функціями, такі як первинний рух, вторинний рух та нерухомі елементи основи. Такі механічні характеристики, як маса, частоти, відношення парціальних частот, площі перекриття для ємностей у гребінчастих структурах автоматично розраховуються разом із основними вимірювальними характеристиками

чутливого елемента. При цьому розрахунок геометричних та механічних характеристик чутливого елемента виконується автоматично прямо в процесі розробки конструкції, що дозволяє практично виключити ітераційну переробку проекту з ціллю отримати бажані характеристики.

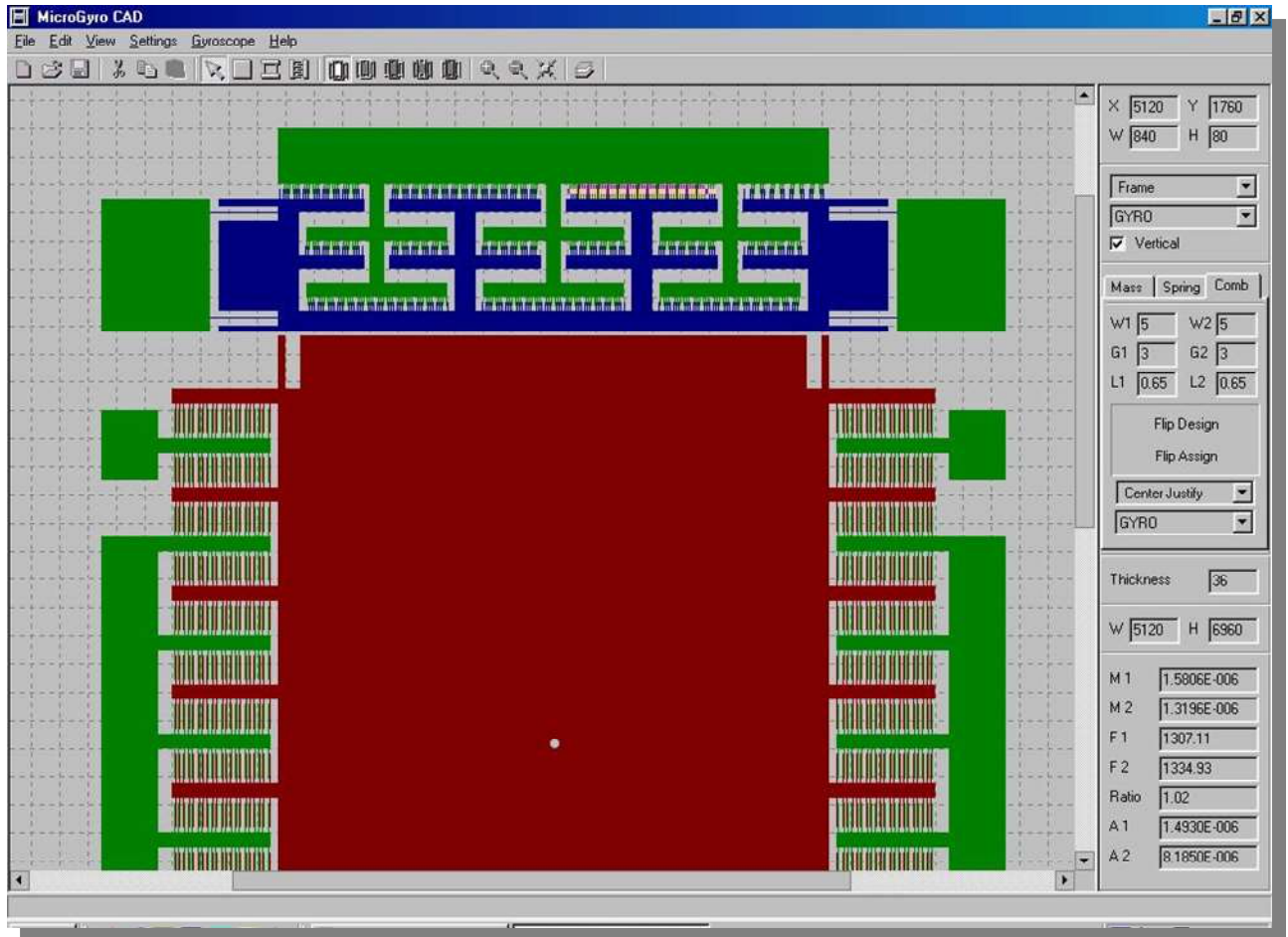


Рис. 5.27. Головний вид програми проектування чутливих елементів MG CAD

Програма дозволяє не тільки проектувати чутливий елемент із автоматичним розрахунком його характеристик, але і експортувати в основні формати масок, таких як GDSII або CIF, які використовуються для автоматичного виготовлення із використанням сучасних технологій мікроелектроніки.

На рис. 5.28 та 5.29 показано фотографії чутливого елемента, виготовленого за допомогою цього програмного забезпечення.

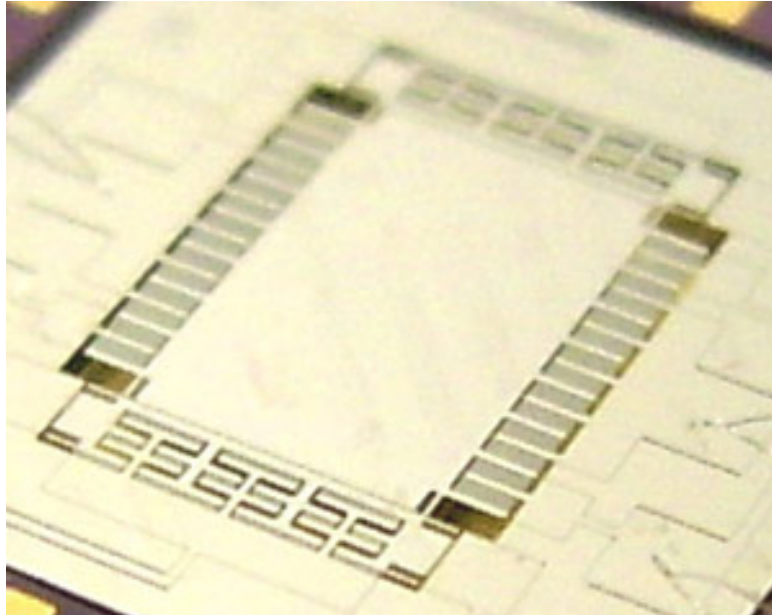


Рис. 5.28. Загальний вигляд чутливого елемента мікромеханічного КВГ

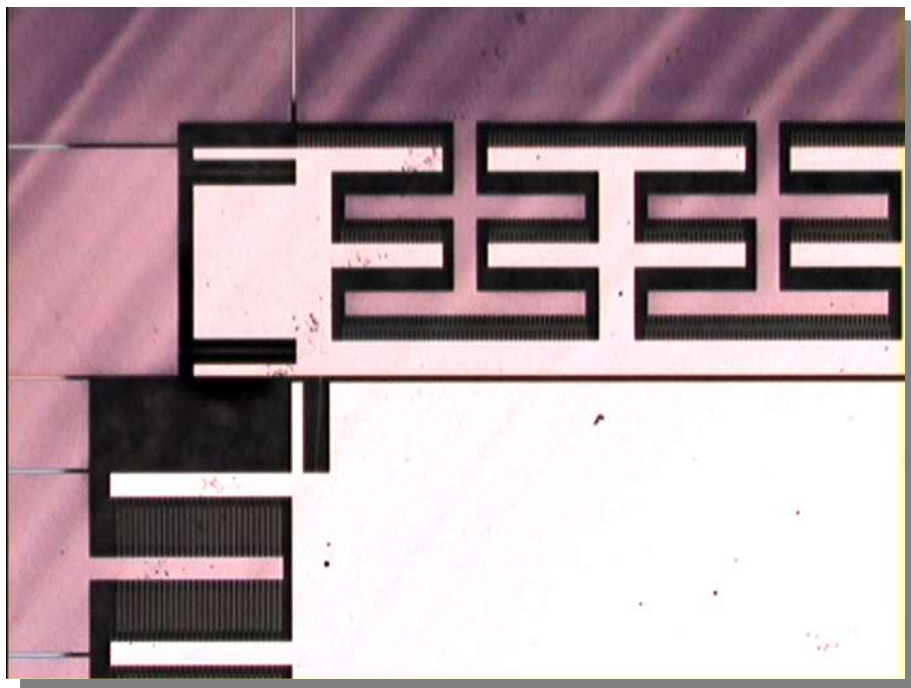


Рис. 5.29. Збільшений вид інерційної маси та додаткової рамки

А на рис. 5.1 можна було побачити збільшену частину гребінчастого двигуна системи збудження первинних коливань чутливого елемента.

Для подальшого тестування чутливий елемент монтується в спеціальному тестовому корпусі, до ніжок якого виводяться також всі його електричні контакти. Загальний вид мікромеханічного коріолісового вібраційного гіроскопа в тестовому корпусі показано на рис. 5.30.

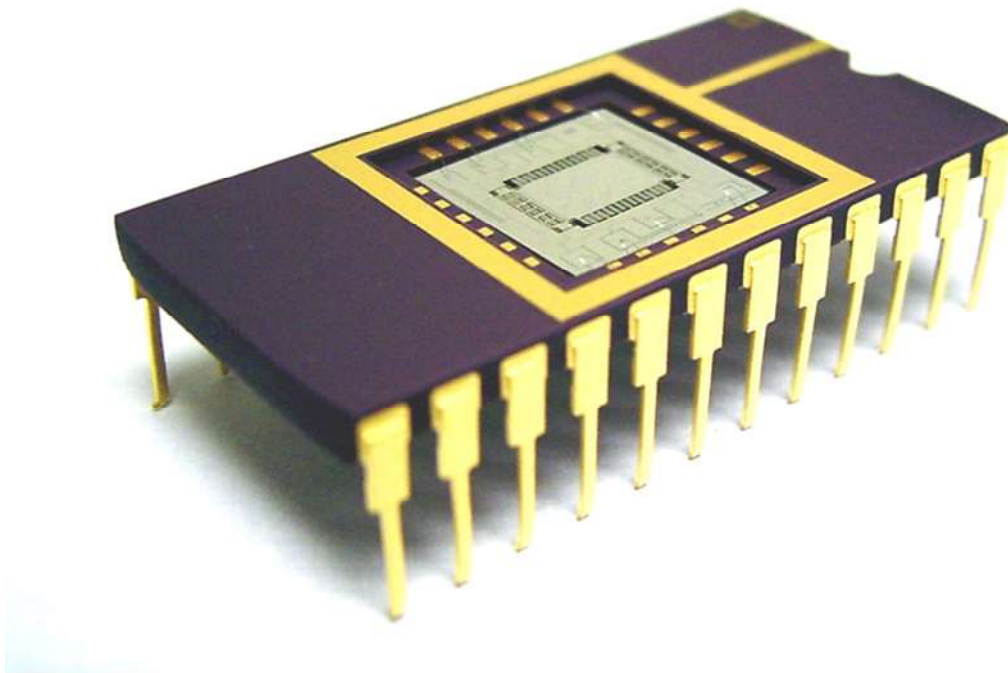


Рис. 5.30. Чутливий елемент мікромеханічного КВГ в корпусі для тестування

На рис. 5.31 показано результати випробувань цього гіроскопа на основі, що обертається. Завдяки використанню режиму збудження з подвійною частотою, кутова швидкість було успішно виміряно навіть без вакуумізації чутливого елемента.

В результаті використання розробленої технології автоматизованого проектування чутливих елементів для мікромеханічних вібраційних гіроскопів, повний цикл від розробки концепції та загального вигляду чутливого елемента до початку його виготовлення може бути виконано в межах одного дня.

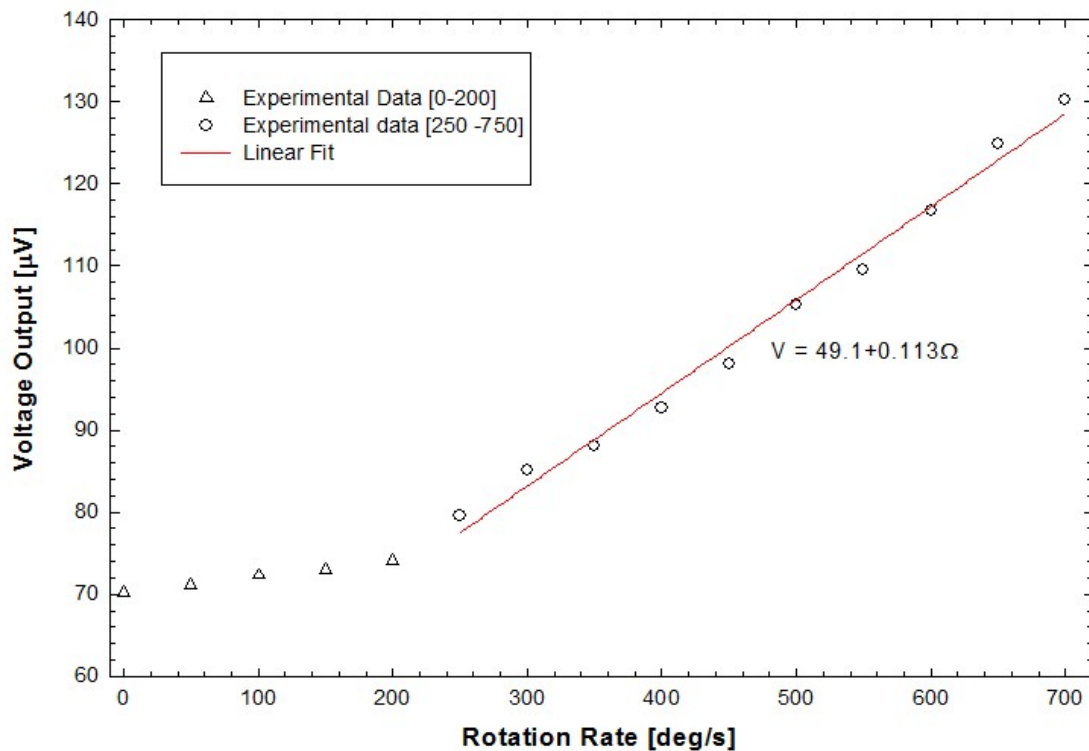


Рис. 5.31. Залежність вихідної напруги (Voltage Output) від кутової швидкості (Rotation Rate) по результатам випробувань

5.7 Висновки

В цьому розділі було розглянуто методи обчислення та оптимізації основних вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів, таких як масштабний коефіцієнт, роздільна здатність, динамічний діапазон, зсув нуля, смуга пропускання, тощо. На основі аналізу моделей похибок по цих основних характеристик, було розроблено методи їх зменшення та методології вибору основних характеристик чутливих елементів, що забезпечують бажані вимірювальні характеристики. Було розроблено математичну модель гребінчастого електростатичного двигуна із врахуванням нелінійностей, отримано оптимальні режими його роботи, досліджено вплив нелінійних

ефектів на роботу вібраційного гіроскопа, сформульовані методи усунення небажаних впливів, які було також перевірено експериментально.

Розроблені методики та алгоритми розрахунку та оптимізації вимірювальних характеристик при проектуванні чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів дозволили розробити спеціалізоване програмне забезпечення для їх швидкого та ефективного проектування.

Таким чином, в цьому розділі було отримано наступні нові наукові та прикладні результати:

- вирази для розрахунку сил, які діють на чутливий елемент і створюються за допомогою електростатичного гребінчастого двигуна із врахуванням нелінійної ємності;
- вирази для розрахунку залежності парціальної частоти чутливого елемента від частоти збудження;
- режими збудження первинних коливань чутливого елемента з максимальною ефективністю;
- вирази для розрахунку масштабного коефіцієнта коріолісових вібраційних гіроскопів та модель похибки від його нелінійності;
- метод розрахунку мінімальної робочої частоти коріолісового вібраційного гіроскопа за заданою прийнятною нелінійністю;
- вираз для розрахунку роздільної здатності для ємнісної системи реєстрації вторинних коливань;
- вираз для розрахунку динамічного діапазону коріолісового вібраційного гіроскопа;
- вирази для зсуву нуля від зовнішніх вібрацій та неспівпадіння пружних та вимірювальних вісей та методика мінімізації цих похибок;
- метод розрахунку кута неспівпадіння пружних і вимірювальний вісей для його подальшої компенсації;
- вирази для розрахунку амплітудної та фазової динамічних похибок;
- вираз для розрахунку смуги пропускання коріолісових вібраційних гіроскопів;

- метод вибору відношення парціальних частот та коефіцієнтів демпфування для забезпечення заданої смуги пропускання;
- алгоритми та програмне забезпечення для ефективного проектування чутливих елементів мікромеханічних коріолісових вібраційних гіроскопів, що значно зменшують час на їх розробку.

РОЗДІЛ 6 ОБРОБКА СИГНАЛІВ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ

Характеристики коріолісових вібраційних гіроскопів можуть бути покращені не тільки належним конструюванням чутливого елемента, але й також наступною обробкою сигналів. Шуми і збурення можуть бути або повністю відфільтрованими, або зменшені шляхом статичної чи динамічної фільтрації [112], добре промодельовані похибки можна компенсувати із використанням як модульованої і демодульованої обробки сигналів, так і керуванням. В цьому розділі буде розглянуто різні алгоритми обробки сигналів, які спрямовані на покращення вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів.

6.1 Шуми та збурення в коріолісових вібраційних гіроскопах

Характеристики КВГ можуть бути значно погіршені неконтрольованими стохастичними впливами двома шляхами: як «шумом вимірювання», який додається до виходу системи, так і «шумом процесу» або збуреннями, які додаються до входу системи. Останній може також трактуватися як збурення, які не можна відрізнити від кутової швидкості. Рис. 6.1 демонструє, як ці два шуми впливають на систему КВГ.

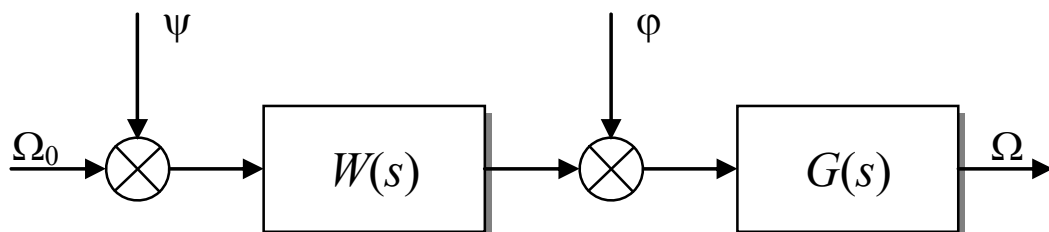


Рис. 6.1. Шуми процесу і датчика в КВГ

Тут $W(s)$ є передатною функцією системи, яка представляє динаміку чутливого елемента КВГ і вивчалась детально раніше в четвертій главі:

$$W(s) = \frac{k\zeta}{s + k\zeta}, \quad (6.1)$$

а $G(s)$ репрезентує деякий фільтр, що покращує характеристики КВГ, ψ є стохастичним збуренням, а φ є шумом вимірювання. Ω_0 є справжньою кутовою швидкістю, а Ω - кутовою швидкістю, виміряною КВГ.

Шуми вимірювання та збурення зазвичай моделюються як різні стохастичні процеси, що задані своїми спектральними густинами потужності.

Однією із найбільш поширених у використанні моделлю є гаусовський білий шум, який описується наступною постійною спектральною густиною потужності, вираженій в області Лапласа:

$$S_w(s) = \sigma^2. \quad (6.2)$$

Цей стохастичний процес має нульове математичне очікування, і σ є його стандартним відхиленням. Для того, щоб зв'язати потужність шуму з потужністю кутової швидкості у подальших виведеннях, до (6.2) може бути додано відношення γ шуму до сигналу таким чином

$$S_w(s) = \gamma^2 \sigma^2. \quad (6.3)$$

Іншим широко використовуваним представленням шуму є броунівський шум або «випадковий дрейф», який визначається як інтеграл від білого шуму, і може бути отриманий, якщо білий шум пропустити через формуючий фільтр з передатною функцією інтегруючої ланки. Амплітудно-частотна характеристика

Він має наступну спектральну щільність потужності:

$$S_b(s) = \frac{\gamma^2 \sigma^2}{-s^2}. \quad (6.4)$$

Графік спектральної щільності (6.4) я функцію частоти показано на Рис. 6.2.

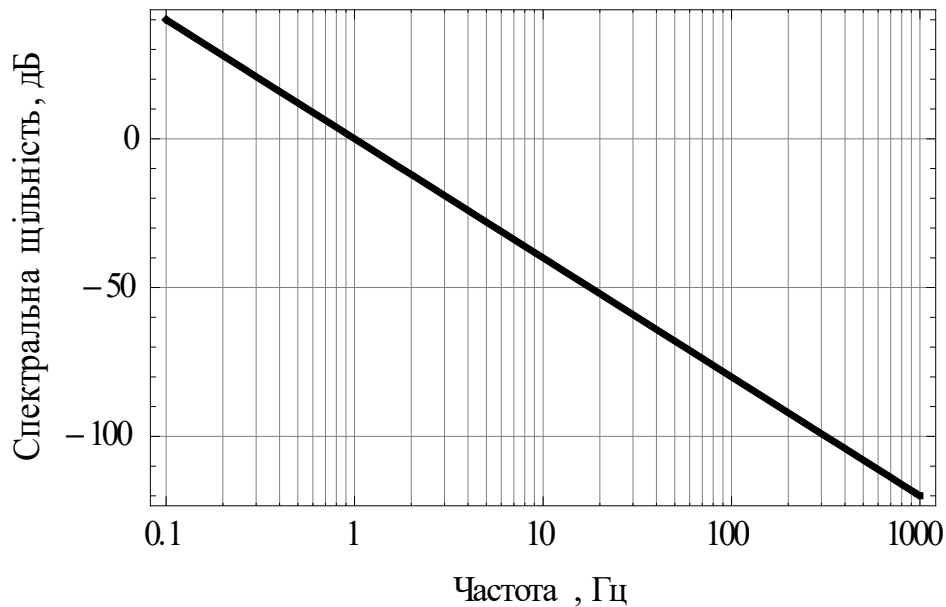


Рис. 6.2. Спектральна щільність випадкового дрейфу

У випадку, коли шум представляється тільки в певній смузі частот, він може моделюватися наступною низькочастотною спектральною щільністю

$$S_l(s) = \frac{\gamma^2 \sigma^2 B^2}{B^2 - s^2}, \quad (6.5)$$

де B є частотою зрізу. Графік низькочастотної спектральної щільності (6.5) показано на Рис. 6.3.

Вона може також доповнюватись високочастотною спектральною щільністю

$$S_h(s) = -\frac{\gamma^2 \sigma^2 s^2}{B^2 - s^2}, \quad (6.6)$$

графік якої показано на Рис. 6.4.

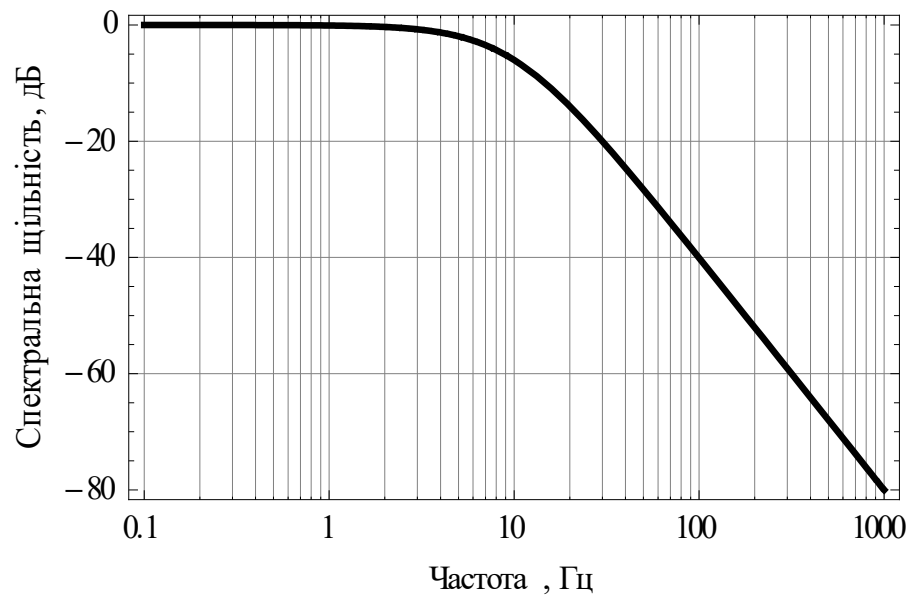


Рис. 6.3. Низькочастотна спектральна щільність
($B=10$ Гц)

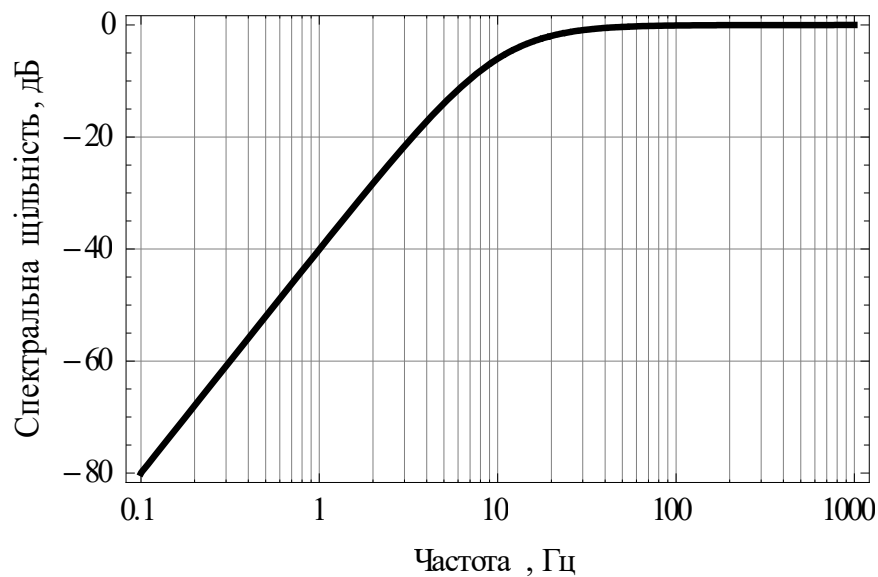


Рис. 6.4. Високочастотна спектральна щільність
($B=10$ Гц)

Спектральні щільності (6.2)-(6.6) можуть тепер використовуватись для синтезу різних фільтрів, які зменшують вплив цих шумів на вимірювальні характеристики коріолісових вібраційних гіроскопів.

6.2 Оптимальна фільтрація шумів вимірювання

Існує два принципово різних підходи до оптимальної фільтрації, які можуть використовуватись для зменшення ефекту шумів вимірювання в коріолісових вібраційних гіроскопах. Один є статичною фільтрацією, а інший – динамічною. Перший означає, що конструюється фільтр із незмінною структурою, який представляється його передатною функцією, і ця функція не змінюється в часі. Оптимальні статичні фільтри виводяться із застосуванням підходу Вінера [112]. Динамічна фільтрація, навпаки, є алгоритмом, який запускається на мікрокомп'ютері і може пристосовувати свої параметри і/або структуру для досягнення максимальної якості фільтрації. Як приклад, можна розглянути цифровий фільтр Калмана, який може ефективно використовуватись для усунення шуму датчика в КВГ. Обидва ці підходи мають свої переваги і недоліки. Наприклад, статичний фільтр не потребує ніякого мікрокомп'ютера і може виконуватись у межах застосування спеціальних інтегральних схем, які виготовляються разом із чутливим елементом. В той же час, динамічна фільтрація може забезпечити кращі характеристики, які також можна і адаптувати під час роботи.

Розглянемо з початку статичний фільтр, приєднаний до виходу системи КВГ, як показано на рис. 6.5.

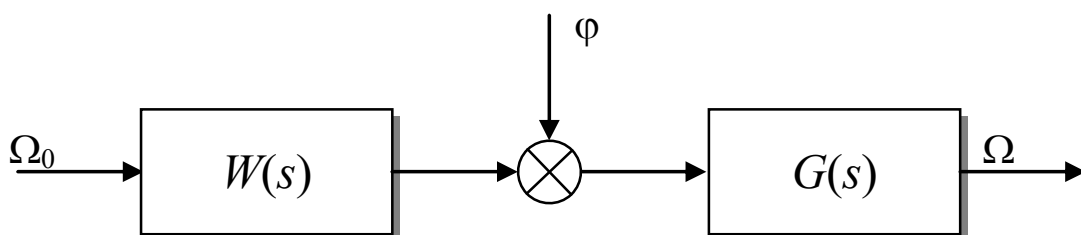


Рис. 6.5. Статична фільтрація шуму датчика

Тут $G(s)$ є передатною функцією оптимального статичного фільтра, що продукує вихід x , який є відфільтрованою з шуму φ датчика вимірною кутовою швидкістю Ω .

Синтез оптимального фільтру шумів вимірювання

Головний алгоритм синтезу оптимального фільтра для системи на рис. 6.2 був розроблений Вінером, і виконується наступним чином.

Похибка системи визначається як різниця між дійсним виходом системи Ω і ідеальним виходом, який задається бажаним перетворенням $H(s)$ входу як

$$\varepsilon = \Omega - H(s) \cdot \Omega_0. \quad (6.7)$$

Також припускається, що сигнали Ω і Ω_0 є центрованими (з нульовим очікуванням) стохастичними процесами, визначеними у термінах системних передатних функцій і відомих спектральних густин вхідної кутової швидкості і шумів датчиків.

Критерій якості для системи приймається у формі наступного такого функціоналу:

$$J = E\{\varepsilon' \cdot \varepsilon\} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(s) ds. \quad (6.8)$$

Тут $S_{\varepsilon\varepsilon}(s)$ є спектральною щільністю похибки, яка може бути обчислена із передатних функцій системи і спектральних щільностей сигналу, використовуючи теорему Вінера-Хінчина наступним чином:

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon\varepsilon}(s) = & (GW - H)S_{\Omega}(W_*G_* - H_*) + (GW - H)S_{\varphi\Omega}G_* \\ & + GS_{\Omega\varphi}(W_*G_* - H_*) + GS_{\varphi}G_*, \end{aligned} \quad (6.9)$$

де зірочкою позначене комплексне спряжене, $S_{\Omega\varphi}(s)$ і $S_{\varphi\Omega}(s)$ є перехресні спектральні щільності між вхідною кутовою швидкістю та адитивним шумом датчика, який взагалі припускається відомим.

Шляхом введення нових змінних, що визначаються як

$$D \cdot D_* = WS_{\Omega}W_* + WS_{\varphi\Omega} + S_{\Omega\varphi}W_* + S_{\varphi}, \quad (6.10 \text{ а})$$

$$\Gamma \cdot \Gamma_* = R, \quad (6.10 \text{ б})$$

$$T = \Gamma \cdot H \cdot (S_{\Omega}W_* + S_{\varphi\Omega})D_*^{-1}, \quad (6.10 \text{ в})$$

$$G_0 = \Gamma \cdot G \cdot D, \quad (6.10 \text{ г})$$

і підставляючи спектральну щільність потужності (6.9) в (6.8), перша варіація критерію якості (6.8) відносно невідомої зв'язаної з фільтром функції G_0 стане

$$\delta J = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [(G_0 - T)\delta G_0 + \delta G_{0*}(G_{0*} - T_*)] ds. \quad (6.11)$$

Мінімум критерію якості (6.8) досягається, коли перша варіація (6.11) обертається в нуль. Очевидно, що це досягається, коли

$$G = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (6.12)$$

Тут T_0 є цілою частиною функції T , а T_+ є частиною функції T , яка містить тільки полюси із від'ємними дійсними частинами (стійкі полюси) і є результатом процедури розкладання Вінера-Хопфа.

Використовуючи розв'язок (6.12) і припускаючи деякі спектральні щільності для кутової швидкості і для шуму датчика, можемо тепер вивести відповідну передатну функцію статичного оптимального фільтру.

Спектральна щільність кутової швидкості повинна вибиратися таким чином, щоб правильно описувати динаміку рухомого об'єкту, на якому використовується коріолісовий вібраційний гіроскоп. Для більшості рухомих

об'єктів, може застосовуватися наступна низькочастотна спектральна щільність:

$$S_{\Omega}(s) = \frac{\sigma^2 B^2}{B^2 - s^2}. \quad (6.13)$$

Тут B є частота зрізу рухомого об'єкту, а σ є стандартним відхиленням кутової швидкості.

Заради простоти, давайте тепер знехтуємо перехресними спектральними щільностями між кутовою швидкістю і шумом, тобто

$$S_{\varphi\Omega}(s) = S_{\Omega\varphi}(s) = 0.$$

Якщо шум датчика є білим шумом і його спектральна щільність задана (6.3), оптимальний фільтр може бути обчислений з використанням (6.12).

Для цього спочатку знайдемо значення правої частини першого виразу з (6.10 а), яка має наступний вигляд:

$$D \cdot D_* = \frac{\sigma^2 [(B+s)(B-s)(k\zeta-s)(k\zeta+s)\gamma^2 + k^2\zeta^2]}{(B+s)(B-s)(k\zeta-s)(k\zeta+s)}.$$

Тепер за допомогою процедури факторизації знайдемо значення для змінної D , яку будемо шукати у вигляді

$$D = \frac{\sigma\gamma(b_0 + b_1s + b_2s^2)}{(B+s)(k\zeta+s)},$$

де невідомі коефіцієнти факторизації b_i знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів, підставляючи запропонований вираз для D у початковий вираз та порівнюючи коефіцієнти при відповідних ступенях змінної Лапласа. В результаті отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів b_i . Розв'язуючи ці рівняння і підставляючи отримані коефіцієнти до запропонованого виразу для D , отримаємо наступну формулу:

$$D = \sigma \frac{k\zeta\sqrt{1+B^2\gamma^2} + s(s\gamma + \sqrt{\gamma}\sqrt{B^2\gamma + k\zeta(k\zeta\gamma + 2\sqrt{1+B^2\gamma^2})})}{(B+s)(k\zeta+s)}.$$

Наступним кроком є обчислення змінної T з (6.10 в) із використанням отриманого виразу для змінної D . Результат має наступний вигляд:

$$T = \frac{k\zeta\sigma}{(B+s) \left\{ -s^2\gamma - k\zeta\sqrt{1+B^2\gamma^2} + s\sqrt{\gamma}\sqrt{B^2\gamma + k\zeta(k\zeta\gamma + 2\sqrt{1+B^2\gamma^2})} \right\}}.$$

У відповідності до алгоритму, змінна T розкладається на додатки наступним чином:

$$T = \frac{c_1}{B+s} + \frac{c_2s + c_3}{-s^2\gamma - k\zeta\sqrt{1+B^2\gamma^2} + s\sqrt{\gamma}\sqrt{B^2\gamma + k\zeta(k\zeta\gamma + 2\sqrt{1+B^2\gamma^2})}}.$$

Тут невідомі коефіцієнти розкладення c_i знаходяться аналогічно попередньому випадку, за методом невизначених коефіцієнтів. У виразі для змінної T нас цікавить стійка складова, яка є першим членом. Знаходячи відповідний чисельник c_1 і підставляючи його до формули (6.12), будемо мати таку передатну функцію фільтру:

$$G(s) = [B\sqrt{1+\gamma^2}(s + \zeta k)] / [\gamma s^2 + s\sqrt{\gamma}(B^2\gamma + \zeta^2 k^2\gamma + 2\zeta k B\sqrt{1+\gamma^2}) + \zeta k B\sqrt{1+\gamma^2}]. \quad (6.14)$$

Передатна функція (6.14) тут була також перенормована наступним чином для усунення усталеної похибки:

$$G(s) = \frac{G^*(s)}{G^*(s \rightarrow 0)},$$

де $G^*(s)$ первинний, неперенормований вираз для фільтру.

Якщо шум датчика вважається таким, що має високочастотну спектральну густину (6.5), тоді передатна функція оптимального фільтру отримується аналогічним чином, як у попередньому випадку.

Добуток $D \cdot D_*$ з першого виразу у (6.10 а) буде

$$D \cdot D_* = \frac{\sigma^2 (s^4 \gamma^2 - k^2 \zeta^2 s^2 \gamma^2 + B^2 k^2 \zeta)}{(B + s)(B - s)(k\zeta - s)(k\zeta + s)}.$$

Змінну D будемо тепер шукати за допомогою процедури факторизації у вигляді

$$D = \frac{\sigma(b_0 + b_1 s + b_2 s^2)}{(B + s)(k\zeta + s)},$$

де невідомі коефіцієнти факторизації b_i знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів аналогічно попередньому випадку. Підставляючи запропонований вираз для D у початковий вираз та порівнюючи коефіцієнти при відповідних ступенях змінної Лапласа отримаємо

$$D = \sigma \frac{Bk\zeta + s[s\gamma + \sqrt{k\zeta\gamma(2B + k\zeta\gamma)}]}{(B + s)(k\zeta + s)},$$

а відповідний вираз для змінної T буде

$$T = -\frac{\sigma B^2 k \zeta}{(B + s)(Bk\zeta + s^2 \gamma - s \sqrt{k\zeta\gamma(2B + k\zeta\gamma)})}.$$

Після розкладення на складові як у попередньому випадку, підстановки у формулу (6.12) та застосування нормалізації, отримаємо наступну передатну функцію для оптимального статичного фільтру шумів вимірювання:

$$G(s) = \frac{B(s + \zeta k)}{s^2 \gamma + s \sqrt{\zeta k \gamma (2B + \zeta k \gamma)} + B \zeta k}. \quad (6.15)$$

В залежності від того, яка модель шуму датчика вважатиметься найбільш прийнятною, можуть використовуватись або фільтр (6.14), або фільтр (6.15).

Слід відмітити, що отримані оптимальні фільтри (6.14) і (6.15) є *статичними*, і будучи вираженими у термінах передатних функцій, можуть бути легко виконані, застосовуючи просту аналогову електроніку на інтегральних схемах низького рівня. На відміну від статичної фільтрації, використання фільтрації, що базується на алгоритмі фільтра Калмана вимагає мікропроцесора, який можливо не буде здійсненним з урахування підвищеної вартості, а також не забезпечуватиме достатньо високу частоту обробки вихідних сигналів гіроскопа.

Числове моделювання фільтрації шумів вимірювання

Дослідимо зараз характеристики отриманих оптимальних фільтрів шуму датчика шляхом числових моделювань реалістичного КВГ. Загальна схема числового моделювання показана на рис. 6.6.

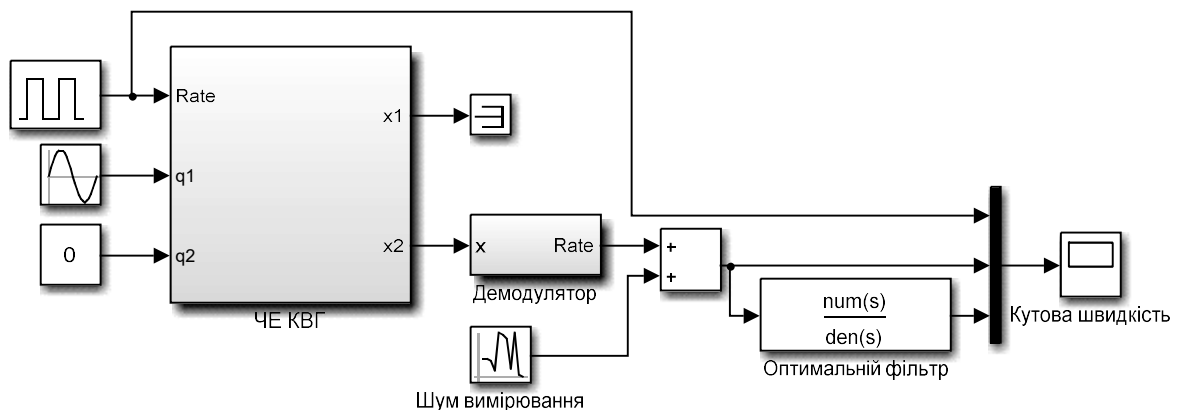


Рис. 6.6. Система числового моделювання фільтрації шумів вимірювання

Вхідна кутова швидкість припускається такою, що має форму одиничних ступінчастих імпульсів. Вихідні вторинні коливання чутливого елемента

коріолісового вібраційного гіроскопа реєструються та демодулюються блоком "демодулятор" (рис. 6.7).

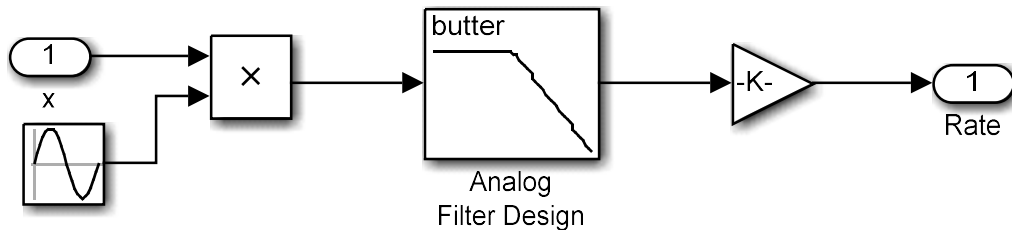


Рис. 6.7. Блок демодуляції вторинних коливань

Далі на них накладаються шуми вимірювання. Сумарний сигнал подається на блок статичного оптимального фільтру, який задається блоком передатної функції. Фільтр реалізується за виразами (6.14) або (6.15). Вихід оптимального фільтру подається на вхід блоку графічного відображення разом із оригінальною та зашумленою кутовими швидкостями.

Результати числових моделювань фільтрації «білого» шуму датчика показані на рис. 6.8.

Ці результати числового моделювання виконувалися було отримано для $\gamma=0.1$ і смуги частот кутової швидкості $B=3$ Гц. Можна спостерігати хорошу якість синтезованого фільтру, який ефективно усуває білий шум датчика.

6.3 Оптимальна фільтрація стохастичних збурень

В час, як шуми вимірювання можуть бути ефективно видалено за допомогою як статичної, так і динамічної оптимальної фільтрації, усунення стохастичних збурень, або збурень, які подібні до вимірюваної кутової швидкості, є більш важкою задачею.

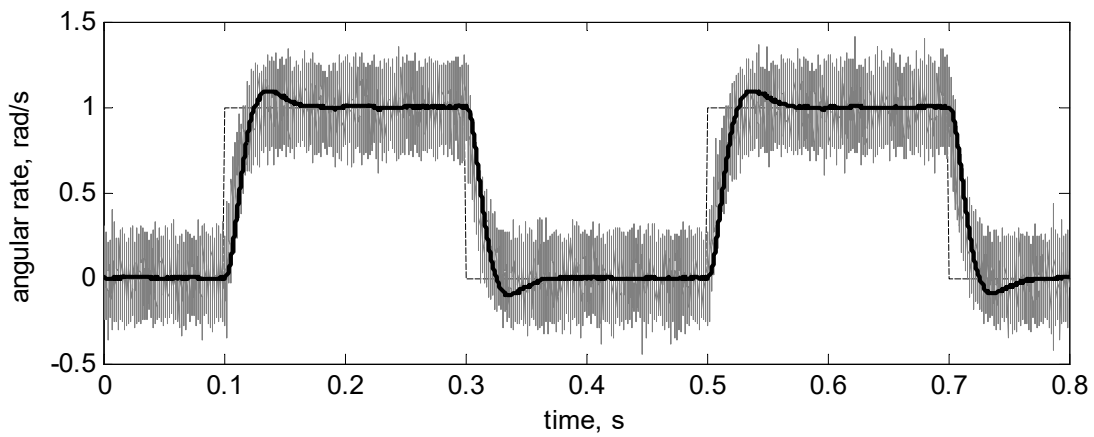


Рис. 6.8. Моделювання фільтрації шуму датчика
(пунктирна – вхідна кутова швидкість, сіра – зашумлений вихід,
чорна – фільтрований вихід)

Збурення діють на КВГ тим же шляхом, що і невідома кутова швидкість, що робить їх по суті невідрізнюваними від неї (див. рис. 6.9).

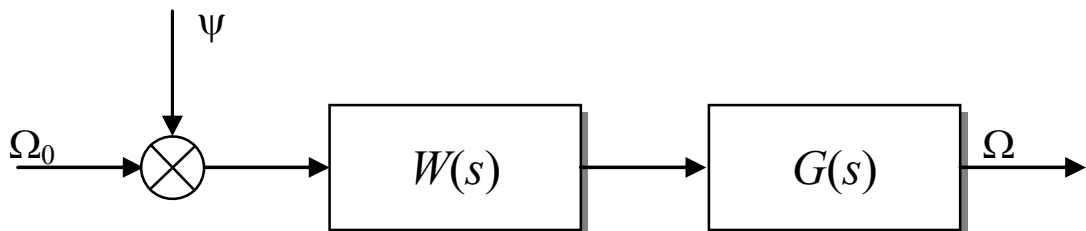


Рис. 6.9. КВГ з доданими «схожими на швидкість» збуреннями

Тут на рис. 6.9 $W(s)$ є передатною функцією системи, заданою (6.1), ψ є шумом процесу (стохастичним збуренням), Ω_0 є вхідною кутовою швидкістю, $G(s)$ є оптимальним фільтром, який ще треба розробити, Ω є відфільтрованим виходом системи, який у ідеальному випадку дорівнює кутовій швидкості Ω_0 .

Єдиним шляхом для відокремлення виходу від кутової швидкості від виходу, спричиненого збуреннями ψ є прийняття до уваги додаткової інформації про кутову швидкість і збурення, та їхніх спектральних щільностей.

Припустимо, наприклад, що КВГ встановлений на рухомому об'єкті, такому як літак або наземний екіпаж, а спектральна щільність потужності кутової швидкості задана (6.13). Шум процесу може припускатися у вигляді білого шуму із спектральною щільністю (6.3) або високочастотного стохастичного процесу, описаного (6.6). Очевидно, останнє означає краще відокремлення збурень від кутової швидкості.

Для того, щоб синтезувати оптимальний фільтр шуму процесу, можна використати той же підхід Вінера, описаний (6.8)-(6.12). Шум датчика ϕ , як показано на рис. 6.5, є шумом процесу ψ , перетвореного передатною функцією КВГ:

$$\phi(s) = W(s) \cdot \psi(s). \quad (6.16)$$

Спектральна щільність потужності шуму датчика, задана (6.16) обчислюється із використанням теореми Вінера-Хінчина наступним чином. Для подібних до білого шуму збурень (6.3) вона задається як

$$S_{\phi\phi}(s) = |W_{\Omega}(s)|^2 S_{\psi}(s) = \frac{\gamma^2 \sigma^2 k^2 \zeta^2}{-s^2 + k^2 \zeta^2}, \quad (6.17)$$

і для випадку високочастотних збурень (6.6) вона є

$$S_{\phi\phi}(s) = \frac{\gamma^2 \sigma^2 k^2 \zeta^2 s^2}{(-s^2 + k^2 \zeta^2)(-s^2 + B^2)}. \quad (6.18)$$

Спектральні щільності (6.17) і (6.18) разом із запропонованою спектральною щільністю (6.13) кутової швидкості можуть зараз бути застосовані для виведення оптимальних фільтрів, що базуються на описаному вище підході Вінера. Після виконання перетворень згідно з (6.10), оптимальними фільтрами для збурень у вигляді білого шуму є

$$G(s) = \frac{B\sqrt{1+\gamma^2}(s+\zeta k)}{\zeta k(\gamma s + B\sqrt{1+\gamma^2})}, \quad (6.19)$$

і для високочастотних збурень задається так

$$G(s) = \frac{B(s+\zeta k)}{\zeta k(B+\gamma s)}. \quad (6.20)$$

В залежності від того, яка з моделей збурення вважається більш придатною, буде використовуватись або фільтр (6.19) або (6.20).

Числове моделювання фільтрації стохастичних збурень

Загальна схема числового моделювання фільтрації стохастичних збурень зображено на рис. 6.10.

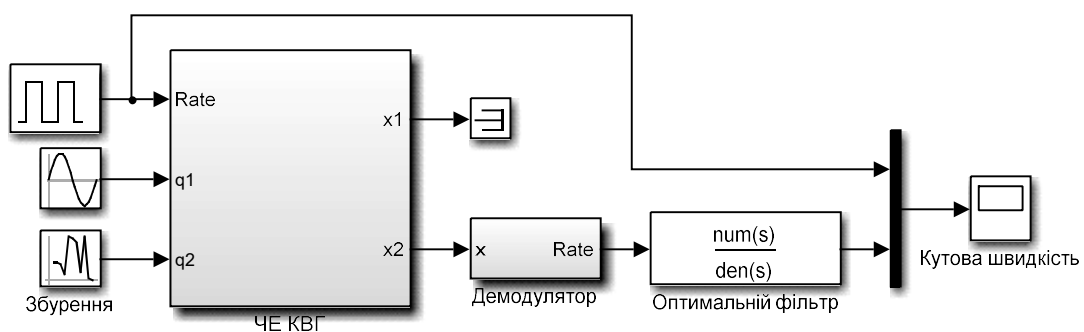


Рис. 6.10. Схема числового моделювання фільтрації збурень

Вхідна кутова швидкість знову має форму одиничних ступінчастих імпульсів. Стохастичні збурення (блок "Збурення") подаються на вхід блоку динаміки чутливого елемента, зображеного на рис. 6.11, де вони діють на вторинний осцилятор аналогічно до вхідної кутової швидкості (відповідні блоки затемнено).

Вихідні вторинні коливання чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа реєструються та демодулюються блоком "демодулятор" аналогічно до схеми числового моделювання фільтрації шумів вимірювання.

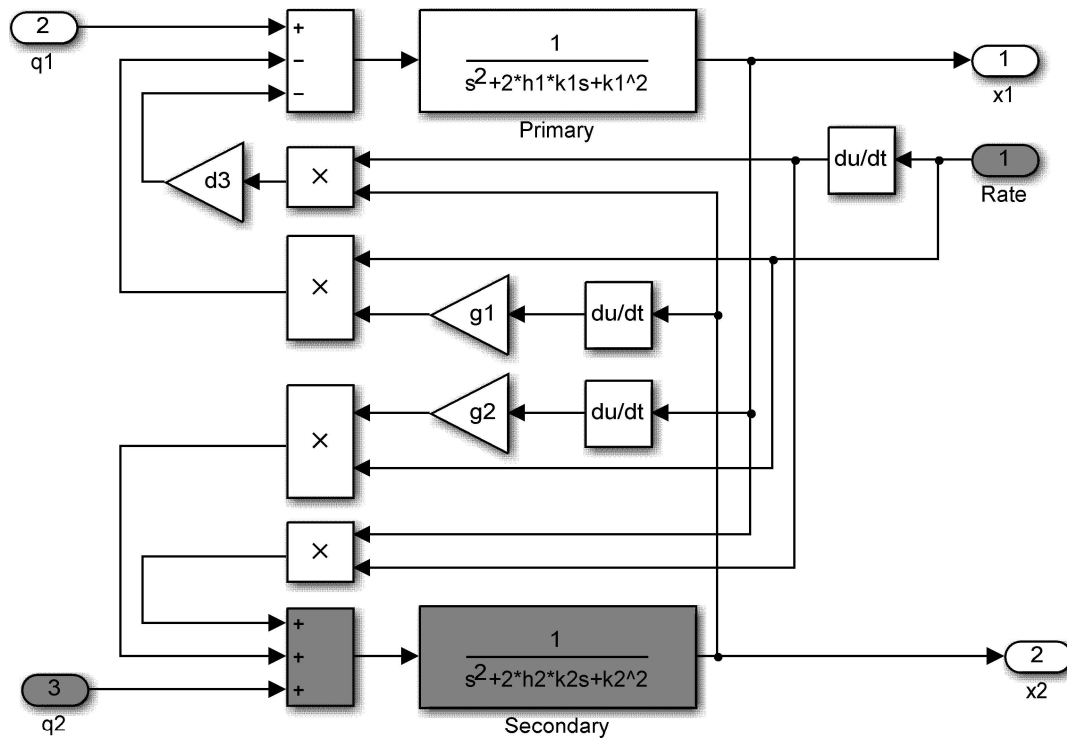


Рис. 6.11. Блок моделювання динаміки чутливого елемента КВГ

Вихід демодулятора подається на вхід блоку оптимального фільтру стохастичних збурень, який задається блоком передатної функції. Фільтр реалізується за виразами (6.19) або (6.20). Вихід оптимального фільтру стохастичних збурень подається на вхід блоку графічного відображення разом із оригінальною кутовою швидкістю.

Результати числових моделювань фільтра (6.19) у випадку збурень у вигляді білого шуму і постійної кутової швидкості показані на рис. 6.12.

Ці результати числового моделювання отримано для збурень високого рівня ($\gamma=1$) і низької смуги частот кутової швидкості ($B=0,5$ Гц). Коли смуга

частот кутової швидкості зростає, ефективність фільтрації збурень знижується.

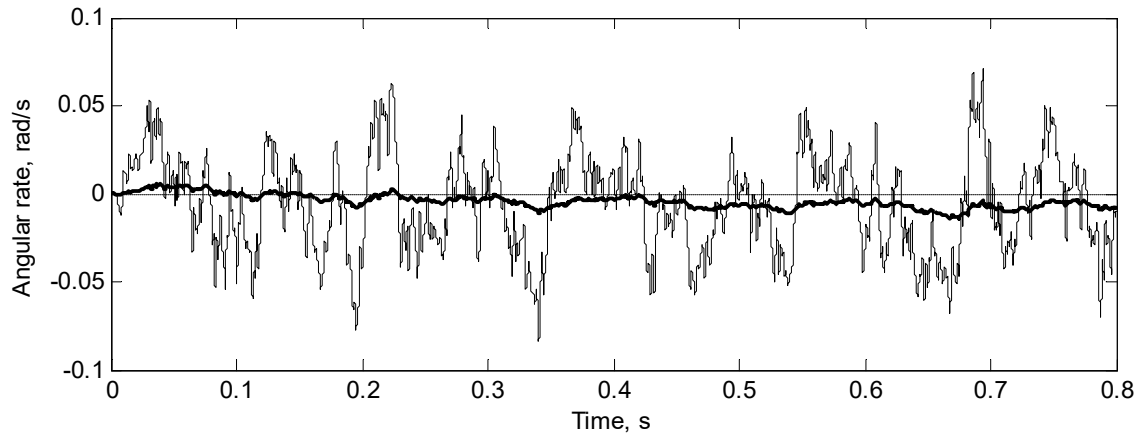


Рис. 6.12. Моделювання фільтрації збурень
(тонка лінія – нефільтрований сигнал, товста – фільтрований)

Давайте поглянемо на ефективність фільтрації як функцію смуги частот кутової швидкості B і відношення шуму до сигналу γ . Ці залежності показані на рис. 6.13 і 6.14.

Тут суцільні лінії відповідають $\gamma=1$, а крапкові - $\gamma=0,5$.

Чим нижче рівень відношення стандартних відхилень σ/σ_0 , тим краще якість фільтрування. Можна відмітити, що коли відношення стандартних відхилень вище за одиницю, фільтрація не покращує якість вимірювань кутової швидкості.

В той же час, доки смуга частот кутової швидкості нижча за смугу частот коріолісових вібраційних гіроскопів, фільтри все ще можуть покращувати вимірювальні характеристики датчиків.

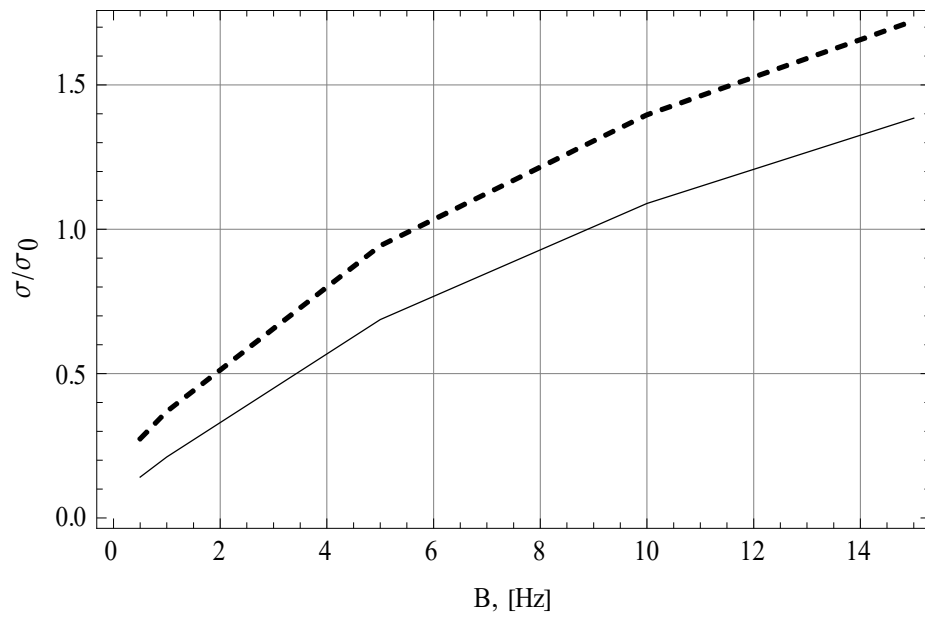


Рис. 6.13. Ефективність фільтрації збурень у вигляді «білого шуму»

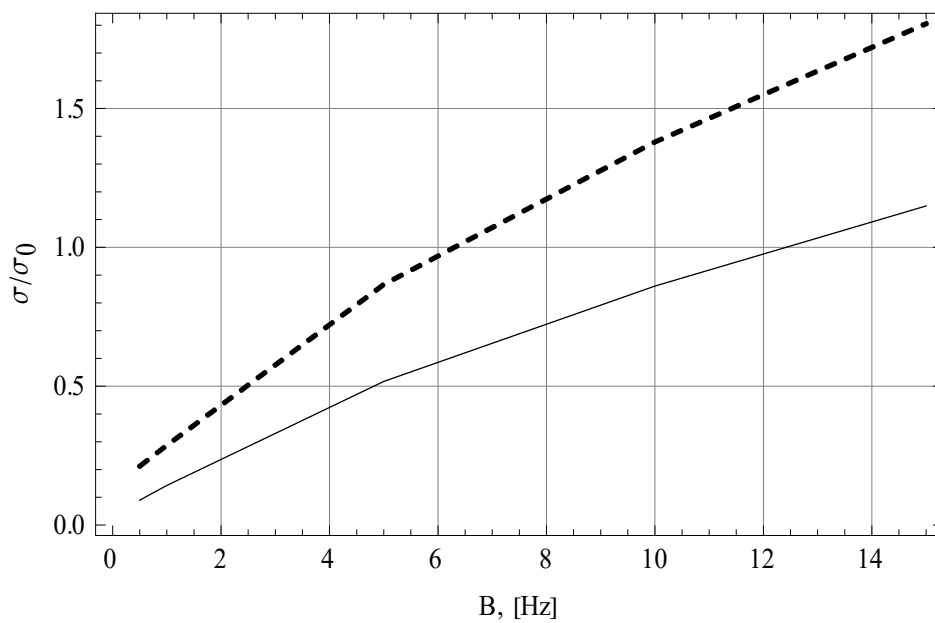


Рис. 6.14. Ефективність фільтрації «високочастотних» збурень

6.4 Синтез оптимального фільтра Калмана

Незважаючи на відмінну характеристику фільтра Вінера у випадку стаціонарних стохастичних шумів та збурень, нестационарні шуми все ж потребуватимуть використання адаптивної фільтрації Калмана разом із відповідним обчислювальним програмним забезпеченням. Продемонструємо зараз, як синтезувати адаптивний фільтр Калмана із застосуванням демодульованої динаміки коріолісових вібраційних гіроскопів.

Модель динаміки КВГ в просторі станів

Для того, щоб забезпечити виконання фільтра Калмана, треба вивести різницеву модель динаміки КВГ в наступній формі:

$$\begin{cases} X_n = F \cdot X_{n-1} + w_{n-1}, \\ Z_n = C \cdot X_n + v_n. \end{cases} \quad (6.21)$$

Тут X_n є дискретною вибіркою дійсного вектора стану, який задається як

$$X = \{\Omega \quad \Omega_0\}',$$

Z_n є вимірним вектором стану,

$$C = [1 \quad 0]$$

є матрицею вимірів стану, w_n та v_n є стохастичними збуреннями і шумами вимірювання відповідно, і F є перехідною матрицею стану, яку можна отримати із використанням добре відомої залежності

$$F = L^{-1} \{(I \cdot s - A)^{-1}\}. \quad (6.22)$$

Тут L^{-1} є зворотнім перетворенням Лапласа, A є матрицею системи, яка у випадку спрощеного представлення (6.1) системи, задається як

$$A = \begin{bmatrix} -k\zeta & k\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Помітимо, що під час виводу (6.23), вхідна кутова швидкість Ω_0 припускалась у вигляді «випадкового дрейфу» (інтегрований білий шум), що є причиною появи нулів у другому рядку матриці A . Підстановка (6.23) в (6.22) має результатом

$$F = \begin{bmatrix} e^{-k\zeta t} & 1 - e^{-k\zeta t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Для того, щоб перевірити спостережуваність стану для спрощеної моделі (6.23), обчислимо матрицю спостережуваності як

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{-k\zeta t} & 1 - e^{-k\zeta t} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Матриця спостережуваності (6.25) має повний ранг, що дорівнює двом, що задовольняє умові спостережуваності стану.

Дискретний фільтр Калмана задається наступними рівняннями. Оцінка стану X_n^- системи і матриці P_n^- коваріації похибки прогнозуються як

$$\begin{aligned} X_n^- &= F \cdot \hat{X}_{n-1}, \\ P_n^- &= F \cdot \hat{P}_{n-1} \cdot F' + Q. \end{aligned} \quad (6.26)$$

де Q є матриця коваріацією збурень w_n . Потім обчислюємо коефіцієнт підсилення K_n Калмана і скоректовані оцінки стану системи \hat{X}_n і матриці \hat{P}_n коваріації похибки, використовуючи наступні вирази:

$$\begin{aligned} K_n &= P_n^- \cdot H' \cdot (H \cdot P_n^- \cdot H' + R)^{-1}, \\ X_n &= X_n^- + K_n \cdot (Z_n - H \cdot X_n^-), \\ \hat{P}_n &= (I - K_n \cdot H) \cdot P_n^-. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Тут R є коваріацією шуму v_n датчика. Обчислені із застосуванням (6.27) оцінки стану системи і матриці коваріації похибки використовуються потім в (6.26), щоб зробити їхній прогноз на наступному кроці.

Числове моделювання роботи фільтра Калмана

Для перевірки якості фільтра Калмана, використовується моделювання динаміки того ж самого реалістичного КВГ, що і в попередній схемі числового моделювання шумів вимірювання (рис. 6.6), але замість статичного оптимального фільтра використовується блок фільтра Калмана із комплекту блоків для обробки сигналів (Simulink/Matlab), який приєднується до вже демодульованої вихідної швидкості (6.15).

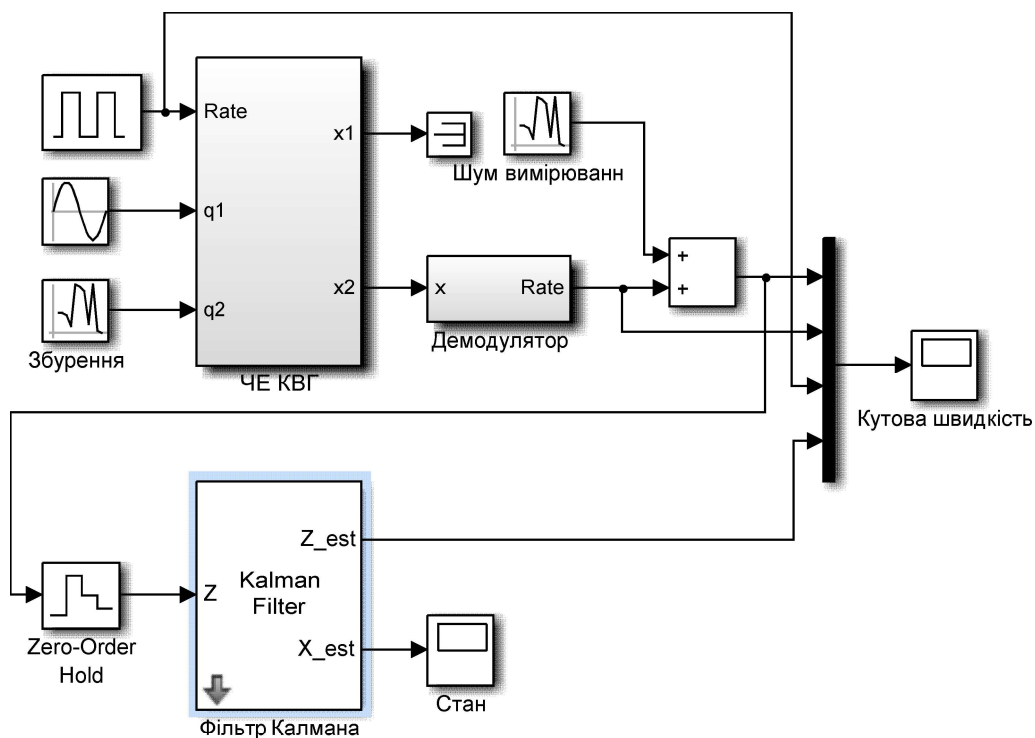


Рис. 6.15. Схема числового моделювання роботи фільтра Калмана

Вхідна кутова швидкість має форму одиничних прямокутних імпульсів з амплітудою 1 рад/с. Білий шум додається до вихідної швидкості до того, як подати її на блок фільтра Калмана.

Фільтрація для випадкового дрейфу

Результати числових моделювань у разі моделювання зовнішньої кутової швидкості випадковим дрейфом показані на рис. 6.16 і 6.17.

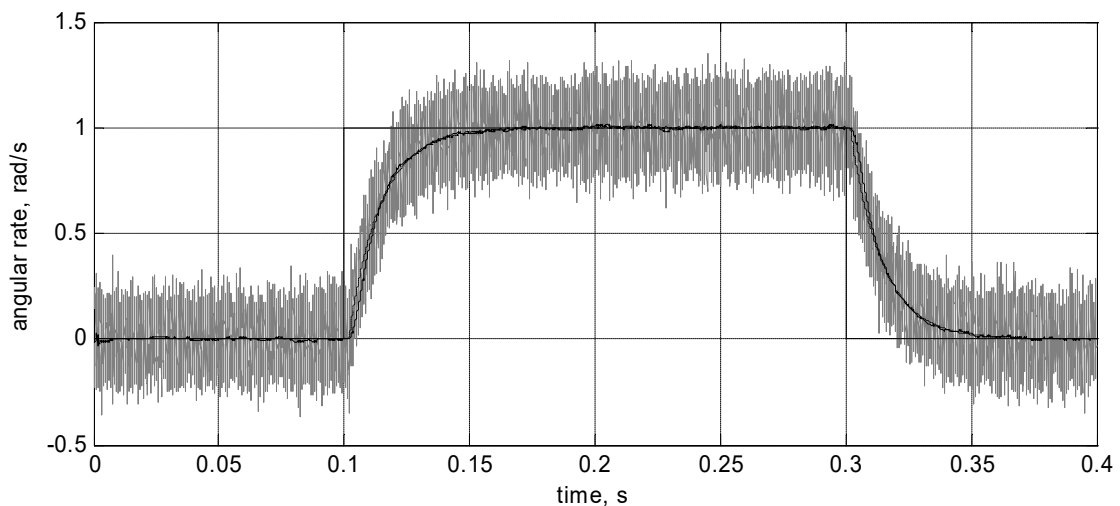


Рис. 6.16. Вимірювання кутової швидкості
(сірий – зашумлений вихід, крапками – дійсний вихід без шуму,
суцільна – оцінка виходу)

При числовому моделюванні використовувались такі параметри КВГ: $k = 500\text{Hz}$, $\zeta = 0.025$. Для вектора стану вибиралися нульові початкові умови, а одинична матриця використовувалася як початкова для матриці коваріації похибки. Інші параметри фільтра, які використовувалися для числового моделювання є наступними:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

$$R = 0.01.$$

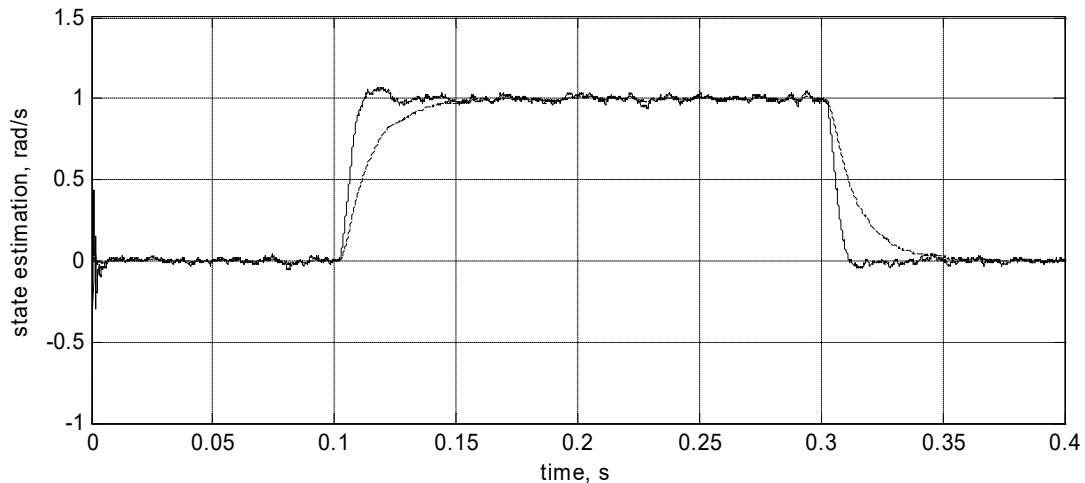


Рис. 6.17. Оцінки стану в часі

(суцільна – вхідна кутова швидкість, пунктиром – вихідна кутова швидкість)

Аналізуючи графіки на рис. 6.16 і 6.17, можна бачити, що доданий шум датчика був успішно усунений із вихідного сигналу, в той час, коли вхідна кутова швидкість оцінювалась з деякими похибками, проте ближче до дійсної форми квадратного імпульсу ніж виміряний вихід гіроскопа.

Фільтрація для низькосмугової кутової швидкості

Тепер розглянемо випадок, коли кутова швидкість створювалась рухомим об'єктом. В цьому випадку вона може моделюватися за допомогою низькочастотної системи, що описується наступним рівнянням:

$$\dot{\Omega} = -B \cdot \Omega + B \cdot \delta, \quad (6.28)$$

де B є смугою частот екіпажу, δ є білим шумом. Матриця системи (6.23) і відповідна перехідна матриця (6.24) тепер стають

$$A = \begin{bmatrix} -k\zeta & k\zeta \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

та

$$F = \begin{bmatrix} e^{-k\zeta t} & \frac{e^{-k\zeta t} - e^{-Bt}}{B - k\zeta} k\zeta \\ 0 & e^{-Bt} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

відповідно. Можна відмітити, що якщо $B = 0$, тоді матриці (6.29) і (6.30) стають матрицями з попередньої моделі.

Результати моделювання для оцінювання стану для випадку низькочастотної кутової швидкості показані на рис. 6.18.

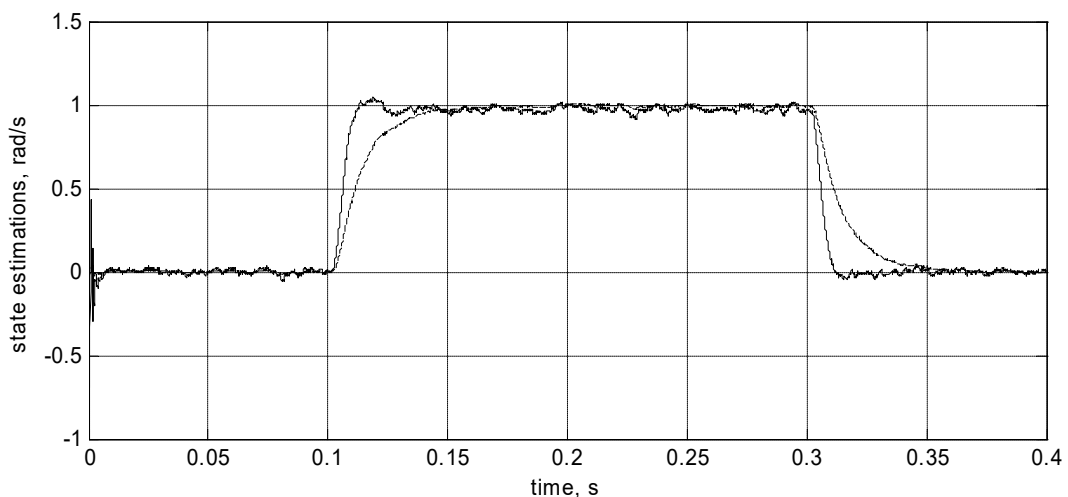


Рис. 6.18. Оцінки стану в часі

(суцільна – вхідна кутова швидкість, пунктиром – вихідна кутова швидкість)

Коваріаційні матриці шуму датчика були взяті таким ж, як і в попередньому випадку, і смуга частот була вибрана $B=1$ Гц .

Із графіка рис. 6.18 можна бачити, що введення смуги частот кутової швидкості не привносить ніяких суттєвих покращень до якості вхідної оцінки. Крім того, проведений аналіз показав, що збільшення смуги частот вводить сталі похибки в оцінювання вхідної кутової швидкості.

6.5 Експериментальна фільтрація шумів вимірювання

Для того, щоб експериментально перевірити здатність отриманих алгоритмів фільтрувати шуми вимірювання їх було застосовано до коріолісового мікромеханічного вібраційного гіроскопа в складі мобільної системи вимірювання рухів. Під час експерименту, трьохосний мікромеханічний датчик кутової швидкості обертався зі швидкістю 20 град/сек. Для реєстрації вихідних сигналів було створено відповідне програмне забезпечення для роботи у середовищі операційної системи Андроїд 2.3 і вище, яке реєструє вихідні сигнали датчиків кутової швидкості у системі та зберігає їх у файлах. Далі ці дані було оброблено за допомогою відповідної системи обробки, створеною у середовищі Simulink/Matlab. Система чисельної обробки експериментальних даних показано на рис. 6.19.

В цій схемі експериментальні дані одночасно подаються на вхід статичного оптимального фільтру шумів вимірювання (блок "Статичний фільтр") та фільтра Калмана (блок "Фільтр Калмана"). Реалізація блоку фільтра Калмана в цій схемі показано на рис. 6.20.

Оброблені фільтрами сигнали подаються на відповідні блоки візуалізації. Крім цього, система обробки розраховує помилку визначення положення за допомогою інтегрування показників коріолісового датчика кутової швидкості. Ця операція виконується блоком розрахунку дрейфу, схема якого зображена на рис. 6.21.

Результати фільтрації зареєстрованої кутової швидкості за допомогою статичного фільтра показано на рис. 6.22, а графіки дрейфів з фільтрацією та без фільтрації показано на рис. 6.23.

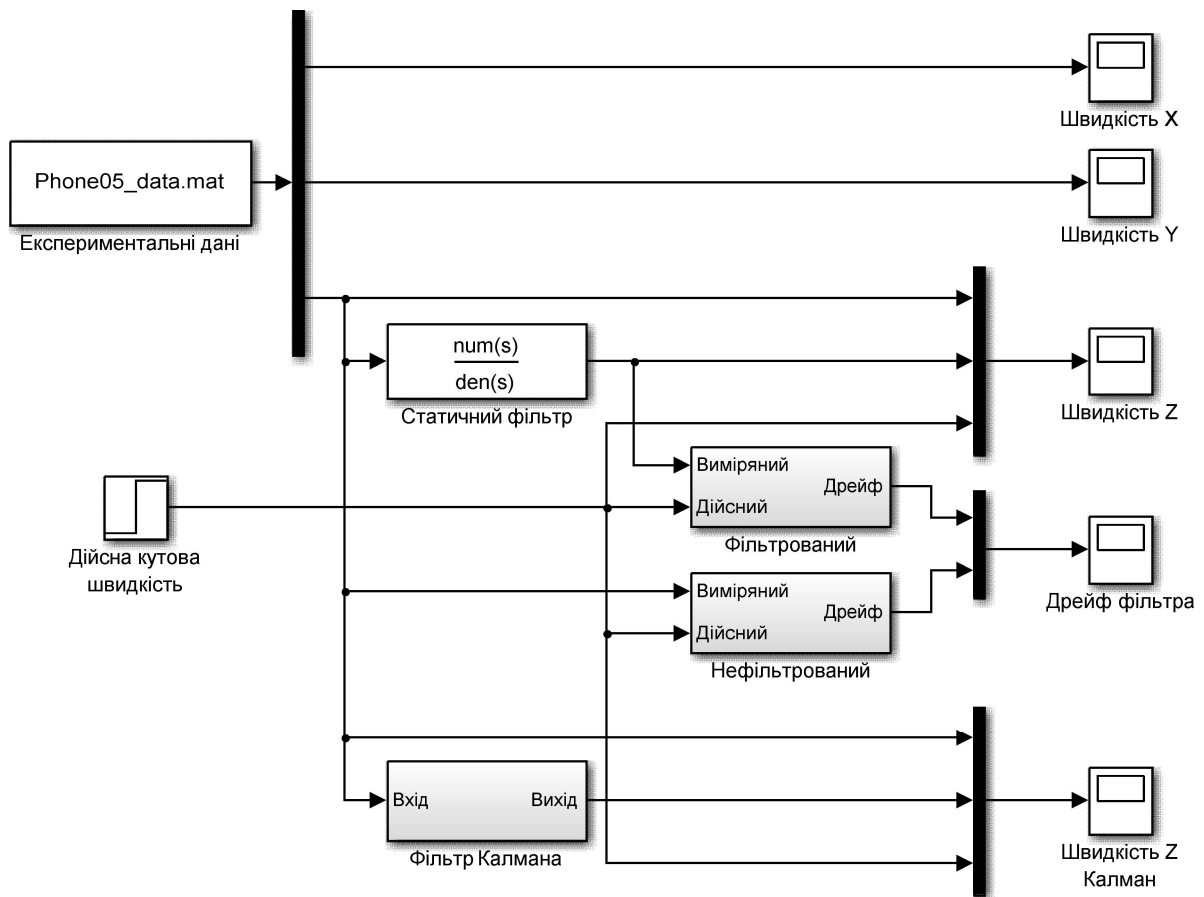


Рис. 6.19. Система обробки експериментальних даних

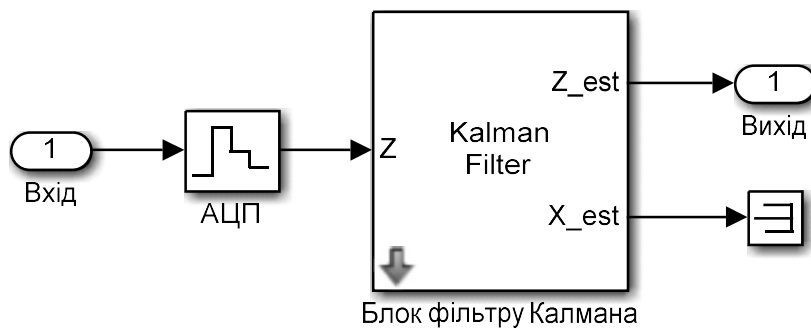


Рис. 6.20. Блок фільтру Калмана

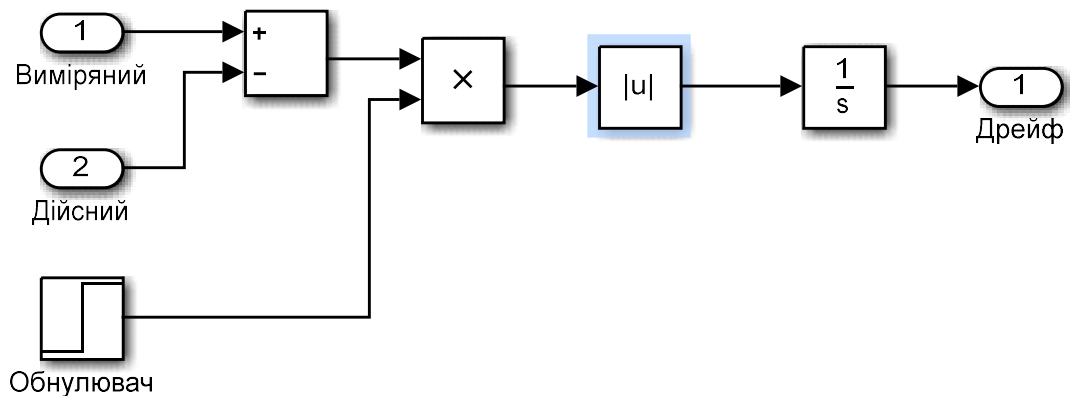


Рис. 6.21. Блок розрахунку дрейфу

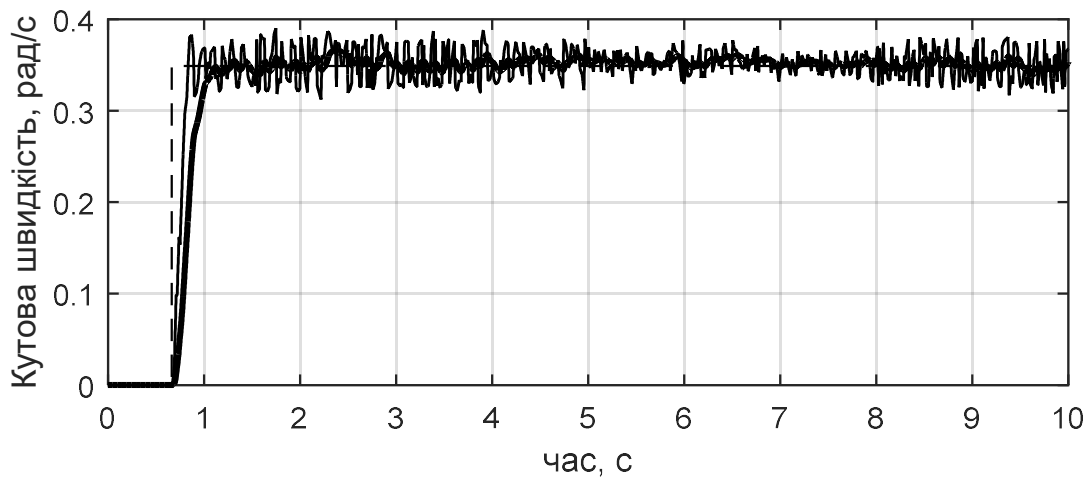


Рис. 6.22. Фільтрація кутової швидкості статичним фільтром

(пунктирна - вхідна кутова швидкість, суцільна тонка - кутова швидкість на виході гіроскопа, суцільна жирна - кутова швидкість після фільтрації)

Порівняння результатів використання синтезованого статичного фільтра шумів вимірювання із результатами використання динамічного адаптивного фільтра Калмана показало, що у разі стаціонарних шумів вимірювання фільтр

Калмана очікувано не надає жодних переваг у порівнянні із статичним фільтром.

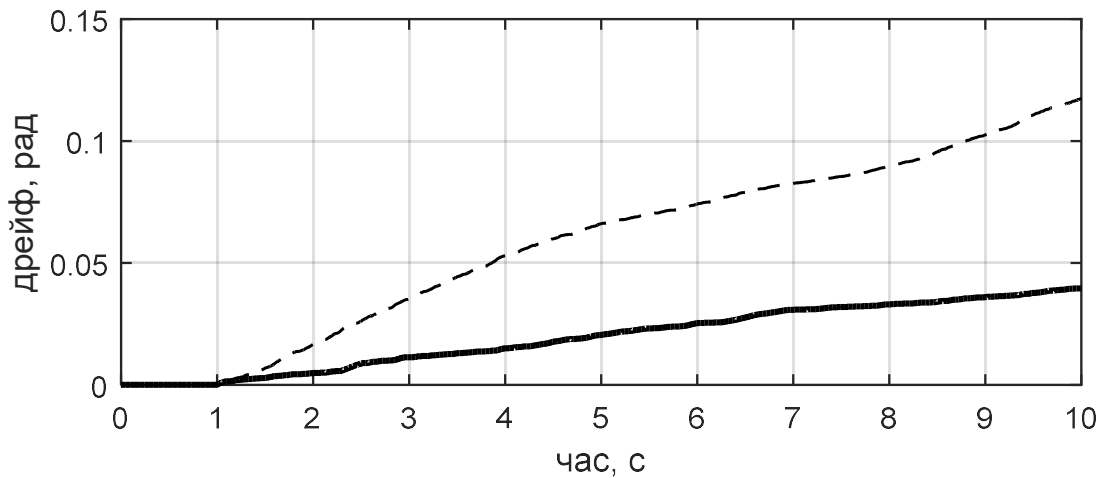


Рис. 6.23. Похибка визначення кутового положення (пунктирна - без фільтрації, суцільна - із використанням статичного фільтра)

6.6 Компенсація перехресних зв'язків

Важливою характеристикою якості для вібраційного гіроскопа є його вихідний сигнал за відсутності кутової швидкості, або зсув нуля. Геометричні недосконалості у вібруючих механічних структурах і/або чутливих і приводних електродах як і електричний зв'язок між цими електродами можуть спричинити вихідний сигнал за відсутності обертання. Особливо для оболонкових конструкцій гіроскопа, перехресне демпфування вібруючої структури може також викликати схожий на швидкість вихід, коли немає обертання.

Через ці проблеми дуже бажаним для коріолісових вібраційних гіроскопів є розвиток ефективної системи віддалення таких перехресних зв'язків.

Для розв'язання цієї проблеми компенсації небажаного перехресного зв'язку, слід розробити структуру відділяючого контуру та ідентифікувати його передатні функції.

Рівняння руху чутливого елемента із перехресними зв'язками

У найбільш узагальненій формі рівняння руху чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа були раніше виведені у формі (2.29) як:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_3\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\dot{\Omega}x_1. \end{cases}$$

Обидва рівняння тут є виключно зв'язані кутовою швидкістю Ω , що має результатом істотну можливість такої системи вимірювати зовнішнє обертання. Однак, в більш реалістичній системі буде присутнім інший перехресний зв'язок, що виявляє себе як перехресне демпфування і перехресна жорсткість. Припускаючи малою і майже постійною кутовою швидкістю ($\Omega^2 \approx 0$ і $\dot{\Omega} \approx 0$), включаючи члени перехресного зв'язку, рівняння руху чутливого елемента тоді стають

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = q_1(t) - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_{12}\dot{x}_2 - c_{12}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = q_2(t) + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_{21}\dot{x}_1 + c_{21}x_1, \end{cases} \quad (6.31)$$

де d_{12} і d_{21} є небажаними коефіцієнтами перехресного демпфування, c_{12} і c_{21} є небажаними коефіцієнтами перехресної жорсткості. Ці коефіцієнти перехресного зв'язку повинні бути скомпенсованими, тоді як вирішальний коріолісовий член із кутовою швидкістю повинен бути збережений.

Застосовуючи перетворення Лапласа до обох сторін системи (6.31), за нульових початкових умов, можемо отримати

$$\begin{cases} (s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)x_1(s) = q_1(s) - (g_1\Omega s + d_{12}s + c_{12})x_2(s), \\ (s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2)x_2(s) = q_2(s) + (g_2\Omega s + d_{21}s + c_{21})x_1(s). \end{cases} \quad (6.32)$$

Чутливий елемент коріолісового вібраційного гіроскопа як елемент систем керування і керований рівняннями (6.32), можна представити за допомогою структурної схеми, показаної на рис. 6.24.

Передатні функції на рис. 6.24 визначаються як

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}, \\
 W_2(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}, \\
 C_1(s) &= (g_1\Omega + d_{12})s + c_{12}, \\
 C_2(s) &= (g_2\Omega + d_{21})s + c_{21}.
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

За допомогою показаної на рис. 6.24 структурної схеми чутливого елемента та значень його передатних функцій (6.33) можемо тепер синтезувати систему компенсації небажаних перехресних зв'язків.

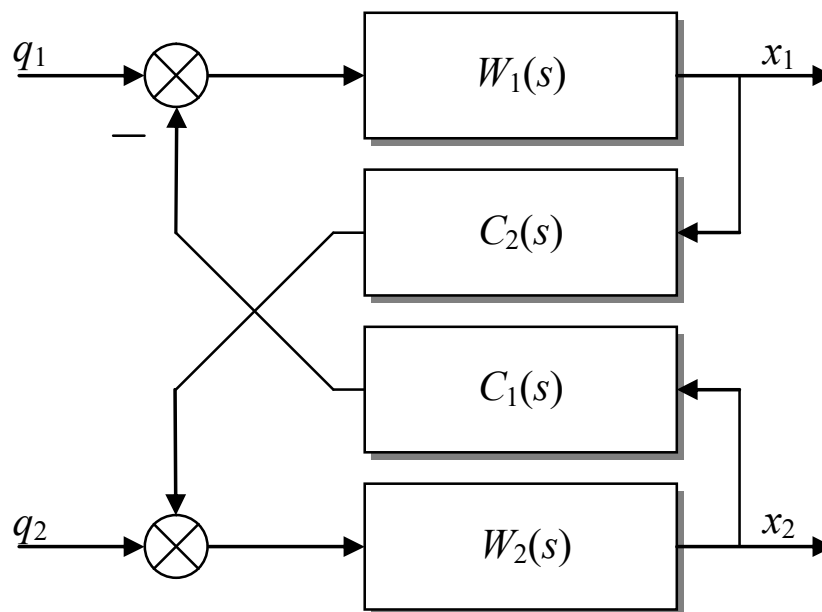


Рис. 6.24. Структурна схема КВГ із перехресним зв'язком

Синтез розв'язуючої системи

Для виходів системи на рис. 6.24 можна розрахувати їх значення за допомогою наступної алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1(s) = W_1(s)[q_1(s) - C_1(s)x_2(s)], \\ x_2(s) = W_2(s)[q_2(s) + C_2(s)x_1(s)]. \end{cases} \quad (6.34)$$

Розв'язуючи систему (6.34) та опускаючи залежність від змінної Лапласа « s », можна записати виходи коріолісового вібраційного гіроскопа як:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{W_1}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_1 - \frac{C_1 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_2, \\ x_2 &= \frac{W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_2 + \frac{C_2 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_1. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Слід зазначити, що в ідеальному випадку, коли в системі присутній тільки корисний коріолісовий перехресний зв'язок, будемо мати

$$\begin{aligned} C_1(s) &\rightarrow C_{10}(s) = g_1 \Omega s, \\ C_2(s) &\rightarrow C_{20}(s) = g_2 \Omega s. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Відповідні виходи ідеальної системи можна отримати шляхом підстановки виразів (6.36) у вирази (6.35).

Розглянемо тепер структуру, яка додана до виходів чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа, як показано на рис. 6.25.

Тут передатні функції H_1 , H_2 , G_1 і G_2 є невідомими і отже потребують визначення. Виходи цієї системи можна обчислити як

$$\begin{aligned} y_1(s) &= H_1(s)x_1(s) + G_1(s)x_2(s), \\ y_2(s) &= H_2(s)x_2(s) - G_2(s)x_1(s). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Підстановка (6.35) в (6.37) дає

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{H_1 W_1 + C_2 G_1 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_1 + \frac{G_1 W_2 - C_1 H_1 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_2, \\ y_2 &= \frac{H_2 W_2 + C_1 G_2 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_2 - \frac{G_2 W_1 - C_2 H_2 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} q_1. \end{aligned} \quad (6.38)$$

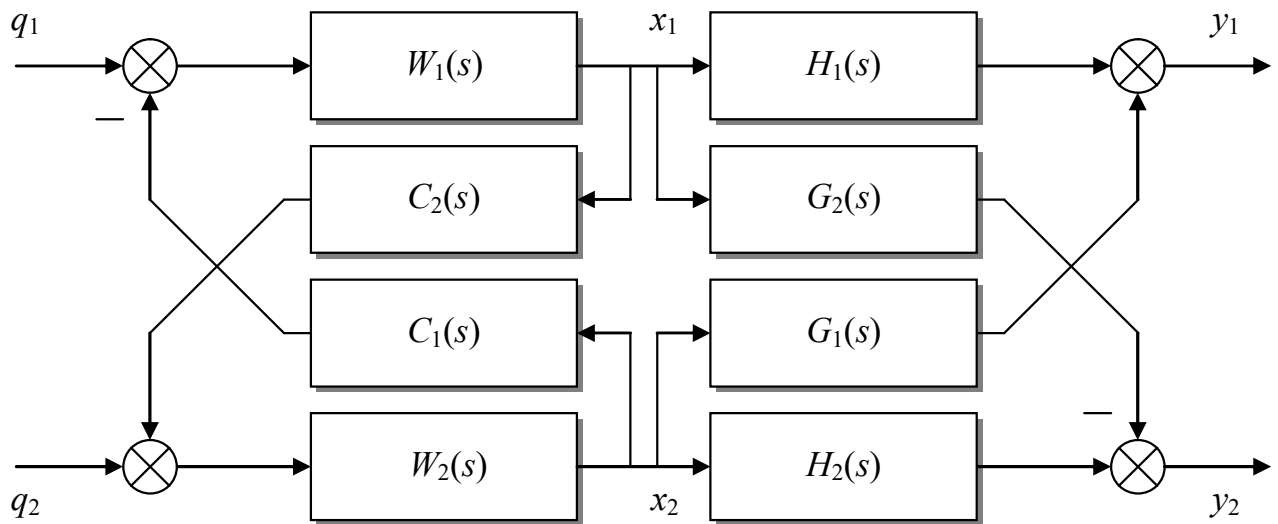


Рис. 6.25. КВГ із доданою розв'язуючою структурою

Припускаючи, що виходи (6.38) після розв'язуючої системи мають бути ідентичними до виходів ідеальної системи, і порівнюючи відповідні передатні функції (коефіцієнти перед q_1 і q_2), можна отримати наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_1 W_1 + C_2 G_1 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} = \frac{W_1}{1 + C_{10} C_{20} W_1 W_2}, \\ \frac{G_1 W_2 - C_1 H_1 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} = -\frac{C_{10} W_1 W_2}{1 + C_{10} C_{20} W_1 W_2}, \\ \frac{H_2 W_2 + C_1 G_2 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} = \frac{W_2}{1 + C_{10} C_{20} W_1 W_2}, \\ -\frac{G_2 W_1 - C_2 H_2 W_1 W_2}{1 + C_1 C_2 W_1 W_2} = \frac{C_{20} W_1 W_2}{1 + C_{10} C_{20} W_1 W_2}. \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Система (6.39) може тепер бути розв'язана відносно невідомих передатних функцій H_1 , H_2 , G_1 і G_2 , що дає

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{(C_1 - C_{10})W_1}{1 + C_{10}C_{20}W_1W_2}, \\
G_2 &= \frac{(C_2 - C_{20})W_2}{1 + C_{10}C_{20}W_1W_2}, \\
H_1 &= \frac{1 + C_{10}C_2W_1W_2}{1 + C_{10}C_{20}W_1W_2}, \\
H_2 &= \frac{1 + C_{20}C_1W_1W_2}{1 + C_{10}C_{20}W_1W_2}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

На кінець, підстановка виразів (6.33) і (6.36) в розв'язки (6.40) має результатом передатні функції розв'язуючої системи КВГ:

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{(c_{12} + d_{12}s)(s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2)}{\Delta(s)}, \\
G_2(s) &= \frac{(c_{21} + d_{21}s)(s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)}{\Delta(s)}, \\
H_1(s) &= 1 + \frac{g_1s(c_{21} + d_{21}s)}{\Delta(s)}\Omega, \\
H_2(s) &= 1 + \frac{g_2s(c_{12} + d_{12}s)}{\Delta(s)}\Omega.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Тут знаменник задається наступним виразом:

$$\Delta(s) = (s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2) + g_1g_2s^2\Omega^2.$$

Оскільки вже припускалося, що кутова швидкість Ω є малою (наприклад $\Omega^2 \approx 0$), вирази (6.41) можуть бути далі спрощені до

$$G_1(s) = \frac{c_{12} + d_{12}s}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}, \tag{6.42 а}$$

$$G_2(s) = \frac{c_{21} + d_{21}s}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}, \tag{6.42 б}$$

$$H_1(s) = 1 + \frac{g_1s(c_{21} + d_{21}s)}{(s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2)}\Omega, \tag{6.42 в}$$

$$H_2(s) = 1 + \frac{g_2 s (c_{12} + d_{12} s)}{(s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2)} \Omega. \quad (6.42 \text{ г})$$

Аналіз виразів (6.41) і (6.42) виявляє добре очікуваний факт, що якщо всі небажані перехресні зв'язки, такі як демпфування і жорсткість, відсутні, тоді ці передатні функції зменшуються до

$$G_1 = G_2 = 0,$$

$$H_1 = H_2 = 1.$$

Однак, можна також відмітити, що ці передатні функції залежать від невідомої кутової швидкості Ω , що вимагає здійснення декількох додаткових кроків, для того, щоб зробити розв'язуючу систему життєздатною.

Частково розв'язуюча система

Приймаючи до розгляду той факт, що вторинні коливання зазвичай є суттєво меншими за первинні, є виправданим припустити, що вплив вторинних коливань на первинні є настільки малим, що не береться до уваги. Крім того, тільки вихід вторинних коливань використовується для вимірювання кутової швидкості. Отже, розв'язуючу систему можна спростити, як показано на рис. 6.26.

Тут передатна функція G_2 задається (6.42). Важливою рисою системи, показаної на рис. 6.26, є те, що вона не залежить від невідомої кутової швидкості. Первинні коливання реєструються та після обробки передатною функцією G_2 віднімаються від вторинних коливань, частково компенсуючи вплив небажаних перехресних зв'язків.

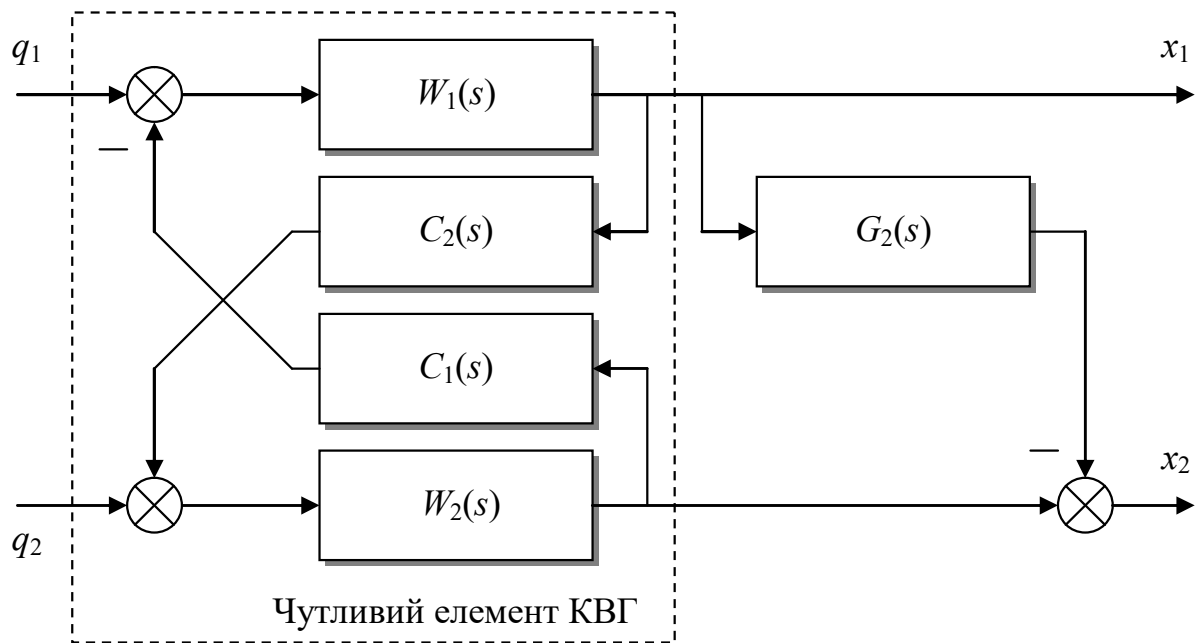


Рис. 6.26. КВГ із частковою розв'язуючою системою

Числове моделювання роботи розв'язуючої системи

Оцінимо якість цієї системи за допомогою числового моделювання. Схема числового моделювання у середовищі Simulink/Matlab має вигляд, показаний на рис. 6.27.

В цій схемі блок "ЧЕ КВГ" описує динаміку чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа із врахуванням додаткових перехресних зв'язків у відповідності до рівнянь руху (6.32). Його схему показано на рис. 6.28, де додаткові блоки виділено затемненим кольором. В схемі також присутні дві розв'язуючі системи: часткова та повна. Внутрішня структура часткової розв'язуючої системи показана на рис. 6.29.

На схемі на рис. 6.29 також присутній контур компенсації впливу вторинних коливань на первинні, який безпосередньо не впливає на вимірювання кутової швидкості, але може покращити роботу системи забезпечення стабільних первинних коливань. Блоки демодуляторів повністю аналогічні до розглянутих раніше.

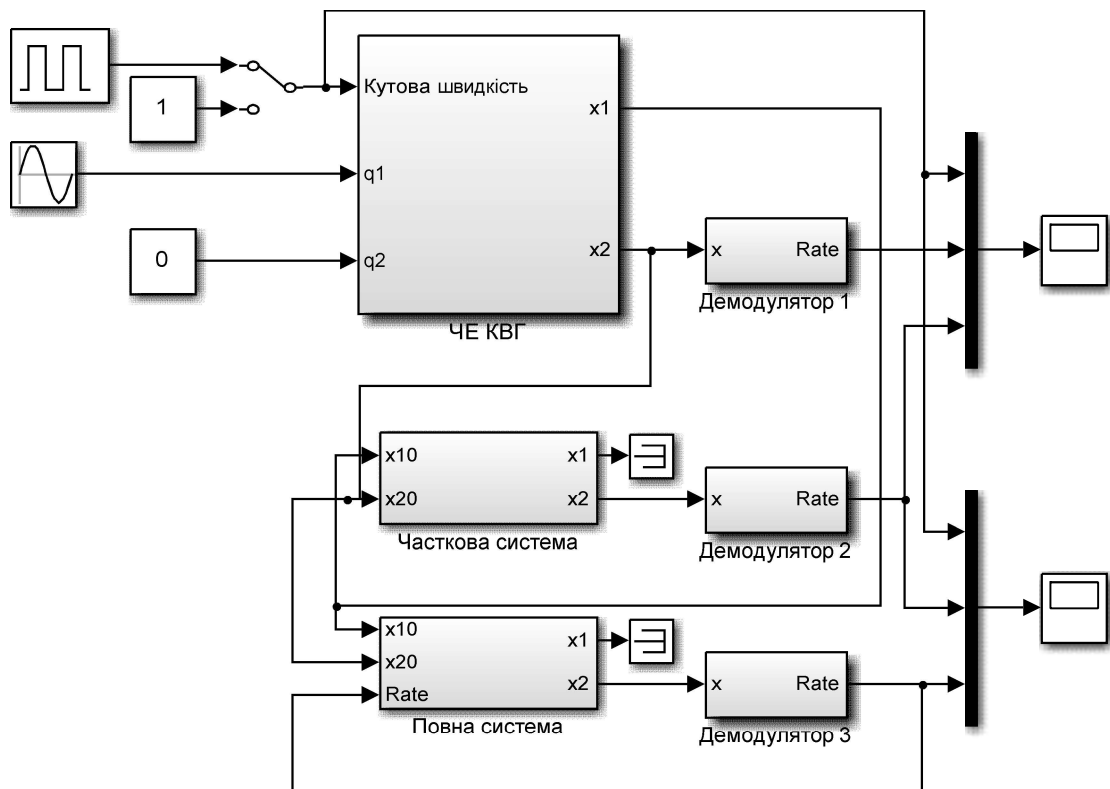


Рис. 6.27. Схема числового моделювання КВГ із розв'язуючими системами

Виміряна кутова швидкість з та без часткової розв'язуючої системи показана на рис. 6.30. Тут коефіцієнти перехресних зв'язків мають наступні значення:

$$d_{12} = -d_{21} = 0.5,$$

$$c_{12} = c_{21} = 50000.$$

Аналізуючи результати числового моделювання можна бачити, що навіть часткова розв'язуюча система значно покращує якість КВГ.

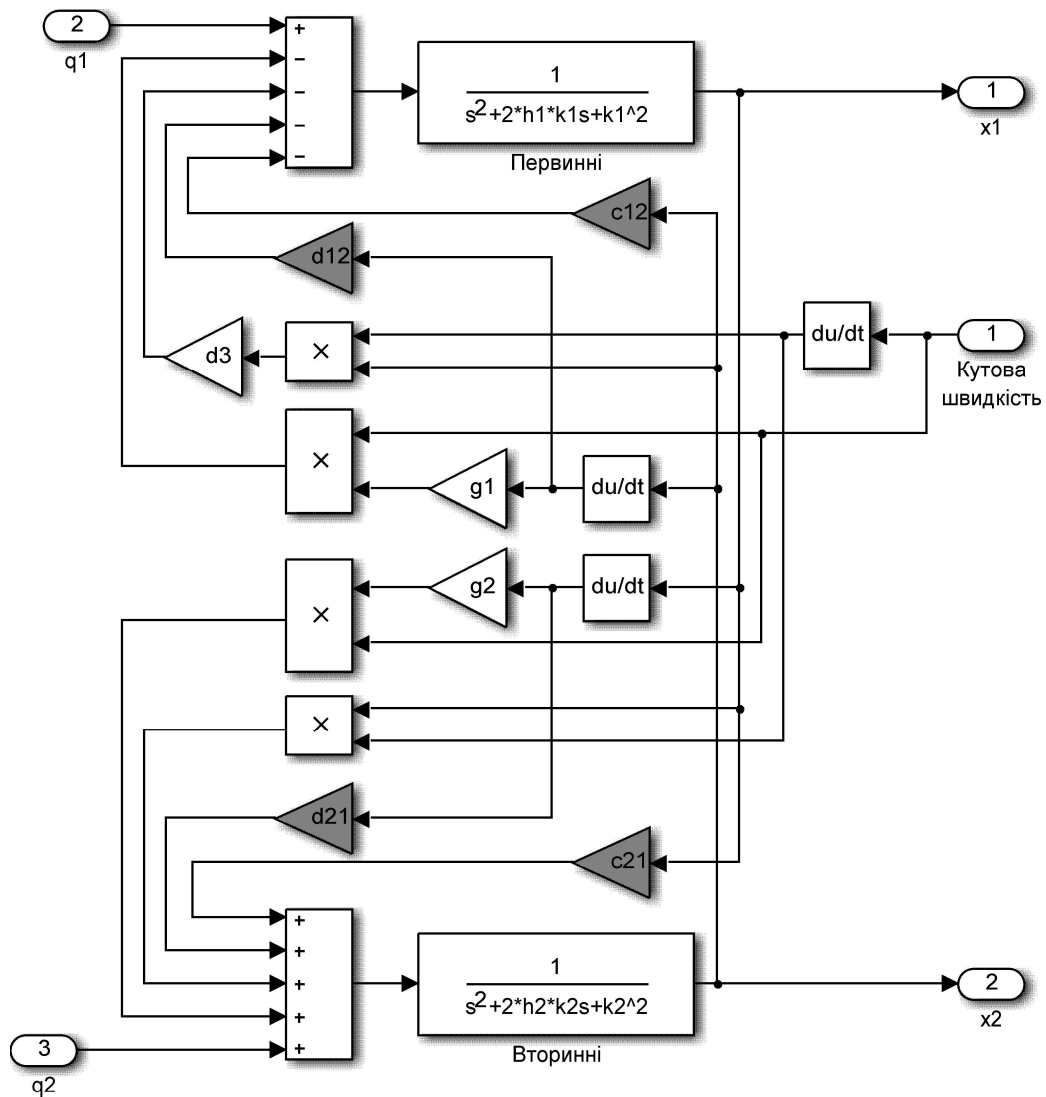


Рис. 6.28. Моделювання динаміки чутливого елемента із перехресними зв'язками

Повна лінеаризована розв'язуюча система

Хоча розглянуте вище система часткового розв'язування до деякої міри звільняє КВГ від небажаних зв'язків, це можливо не є достатнім для високоякісних приладів. В той же час, система повного розв'язування, що

базується на передатних функціях (6.41) не є здійсненою через наявність невідомої кутової швидкості як коефіцієнту в її передатних функціях.

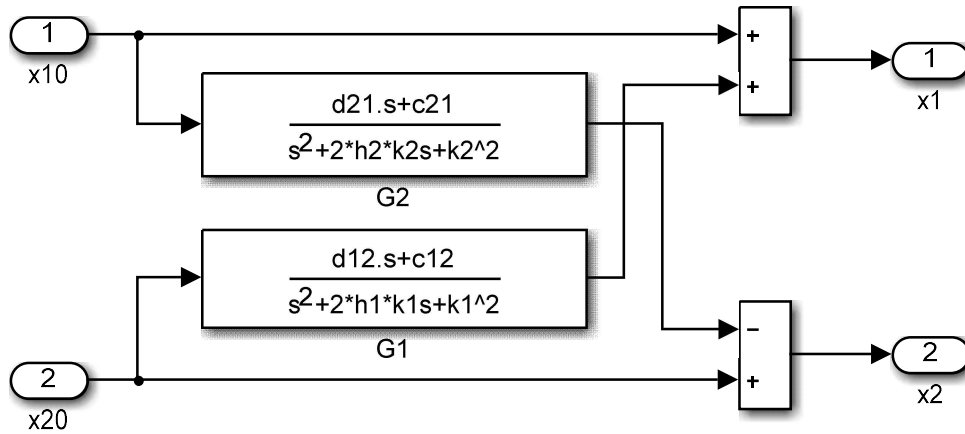


Рис. 6.29. Моделювання часткової розв'язуючої системи

Проте, в лінеаризованих виразах (6.42) кутова швидкість присутня тільки як додатковий вхід до розв'язуючої системи. Така особливість дозволяє побудувати розв'язуючу систему шляхом подавання розв'язаної кутової швидкості назад до розв'язуючої системи, як показано на рис. 6.31.

На рис. 6.31, блок «ЧЕ КВГ» вже був показаний на рис. 6.24, блок «Демодулятор» демодулює вторинні коливання і продукує вимірювану кутову швидкість як його вихід. На кінець, передатна функція зворотного зв'язку $H_{20}(s)$ задається наступним виразом:

$$H_{20}(s) = \frac{g_2 s(c_{12} + d_{12}s)}{(s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2)}. \quad (6.43)$$

Вираз (6.43) виводиться прямо з (6.42) як коефіцієнт біля кутової швидкості у виразі передатної функції $H_2(s)$.

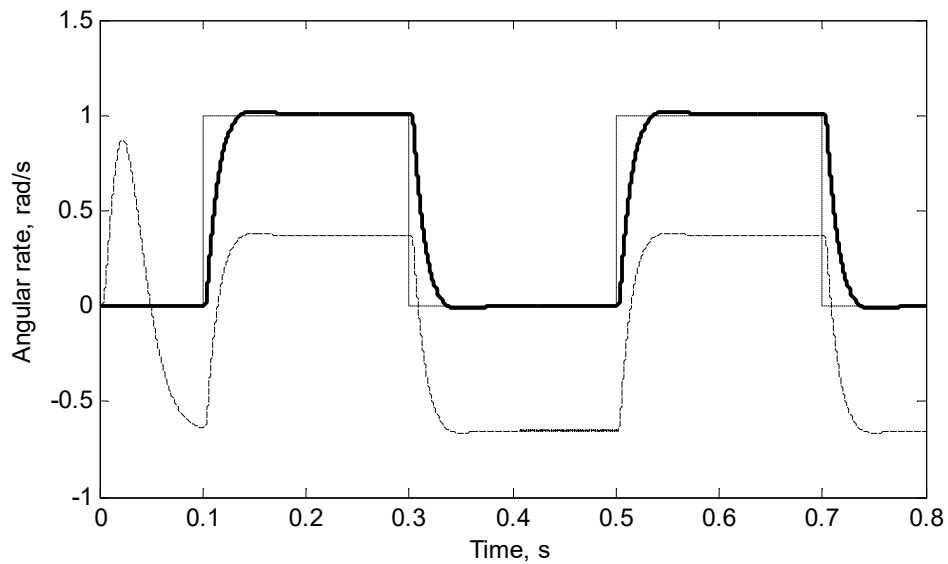


Рис. 6.30. Результати числових моделювань
(крапками – вхідна кутова швидкість, пунктиром – без розв’язування,
суцільна – із розв’язуванням)

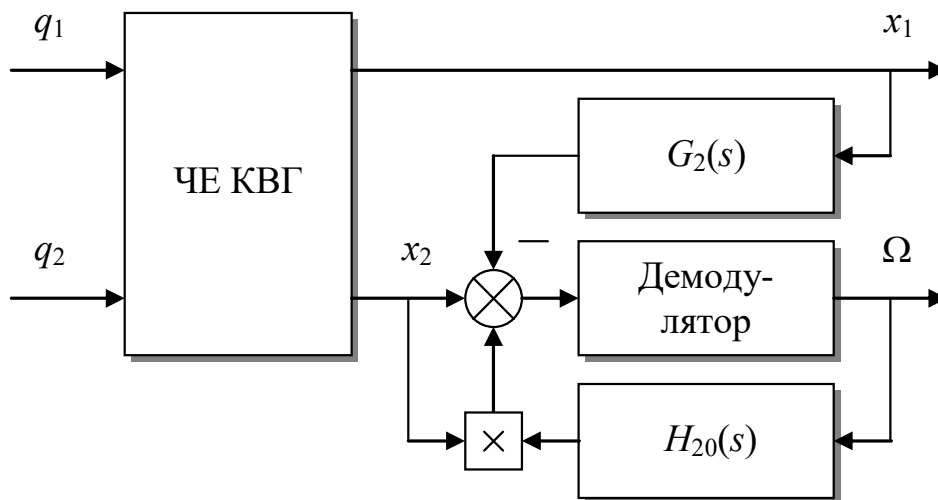


Рис. 6.31. Лінеаризована система повного розв’язування сигналів

Для того, щоб оцінити якість лінеаризованої розв’язуючої системи у порівнянні з частковою розв’язуючою системою, давайте чисельно змодельуємо роботу реалістичного КВГ с цими двома системами за допомогою схеми,

показаної раніше на рис. 6.27. Схема моделювання роботи блоку "Повна система" показана на рис. 6.32.

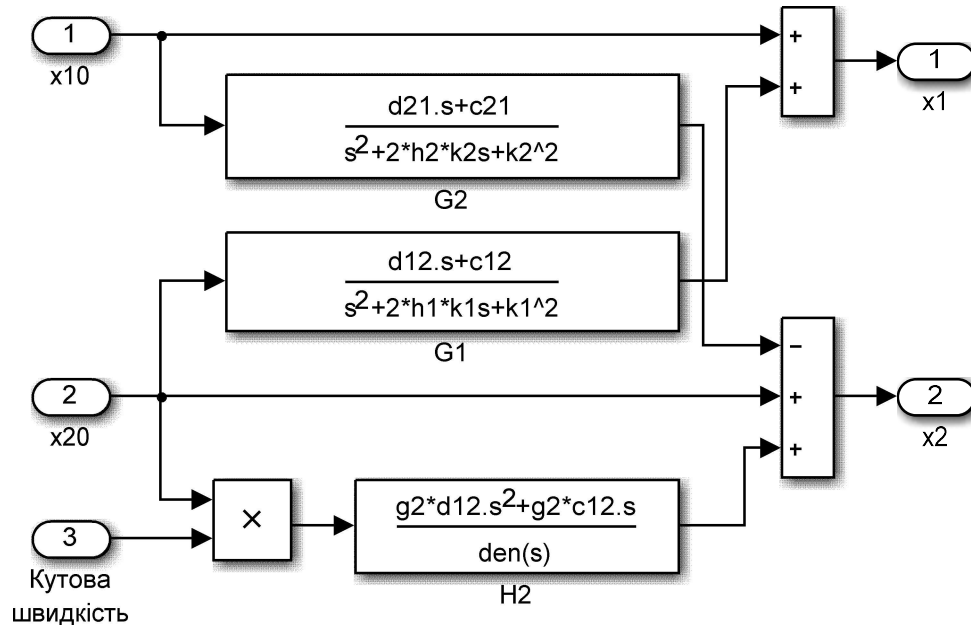


Рис. 6.32. Моделювання повної лінеаризованої розв'язуючої системи

Суттєва частина перехідних процесів на одиничний стрибок по результатах числового моделювання показана на рис. 6.33.

Хоча представлена на рис. 6.31 система є нелінійною, її якість є безсумнівно кращою, ніж якість часткової розв'язуючої системи.

Розв'язуючі системи, які тут досліджувалися, їхня структура і передатні функції, дозволяють значно покращити вимірювальні характеристики коріолісових вібраційних гіроскопів шляхом практичного усунення небажаних перехресних зв'язків. Часткова розв'язуюча система через її простоту пропонується для приладів з низькими вимогами до точності.

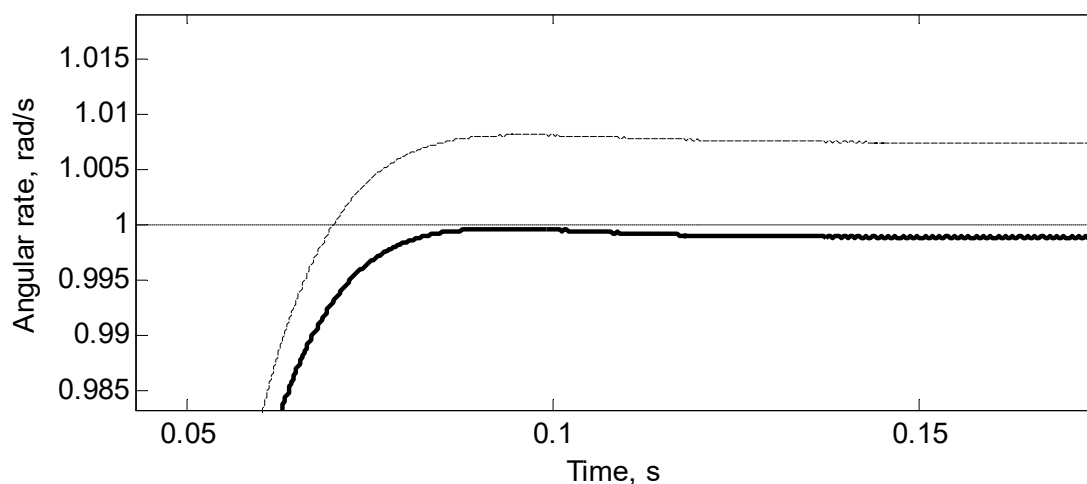


Рис. 6.33. Порівняння якості розв’язуючих систем

(крапками – вхідна кутова швидкість, пунктиром – часткова система розв’язування, суцільна – повна лінеаризована система)

Для високоякісних датчиків може бути виправданим використання лінеаризованої повної розв’язуючої системи. Обидва ці підходи зменшують зсув нуля та покращують стійкість масштабного коефіцієнта коріолісового вібраційного гіроскопа.

6.6 Компенсація перехресних зв’язків по кутовій швидкості

Особливим типом роторних коріолісових вібраційних гіроскопів є динамічно настроюванні гіроскопи (ДНГ). Основною проблемою побудови датчика кутової швидкості на ДНГ пов’язані з перехресною чутливістю його вимірювальних каналів і смугою пропускання [24]. Ці чинники вносять істотні обмеження на якість вимірювання кутової швидкості і його області застосування. Запропонований в попередньому розділі метод синтезу компенсації небажаних перехресних зв’язків можна також адаптувати для покращення роботи також і динамічно настроюваних гіроскопів.

Математична модель чутливого елемента ДНГ

Розглянемо рівняння руху чутливого елемента ДНГ у зображенні Лапласа. При нульових початкових умовах вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} (Js^2 + h_1s + \Delta c)\alpha(s) + (Hs + h_2)\beta(s) &= -H_0\omega_z(s) - Js\omega_y(s) + M_\alpha(s), \\ (Js^2 + h_1s + \Delta c)\beta(s) - (Hs + h_2)\alpha(s) &= H_0\omega_y(s) - Js\omega_z(s) + M_\beta(s), \end{aligned} \quad (6.44)$$

де α і β - кути відхилення ротора ДНГ; J - момент інерції ротора; h_1 - коефіцієнт демпфування; h_2 - коефіцієнт, пропорційний до добутку демпфування і швидкості обертання вала приводного двигуна; Δc - залишкова динамічна жорсткість підвісу; H і H_0 - кінетичні моменти; ω_y і ω_z - компоненти вектора переносної кутової швидкості обертання основи; M_α і M_β - моменти збурення, що діють на ДНГ.

Структурна схема, що відповідає рівнянням (6.44), показана на рис. 6.34.

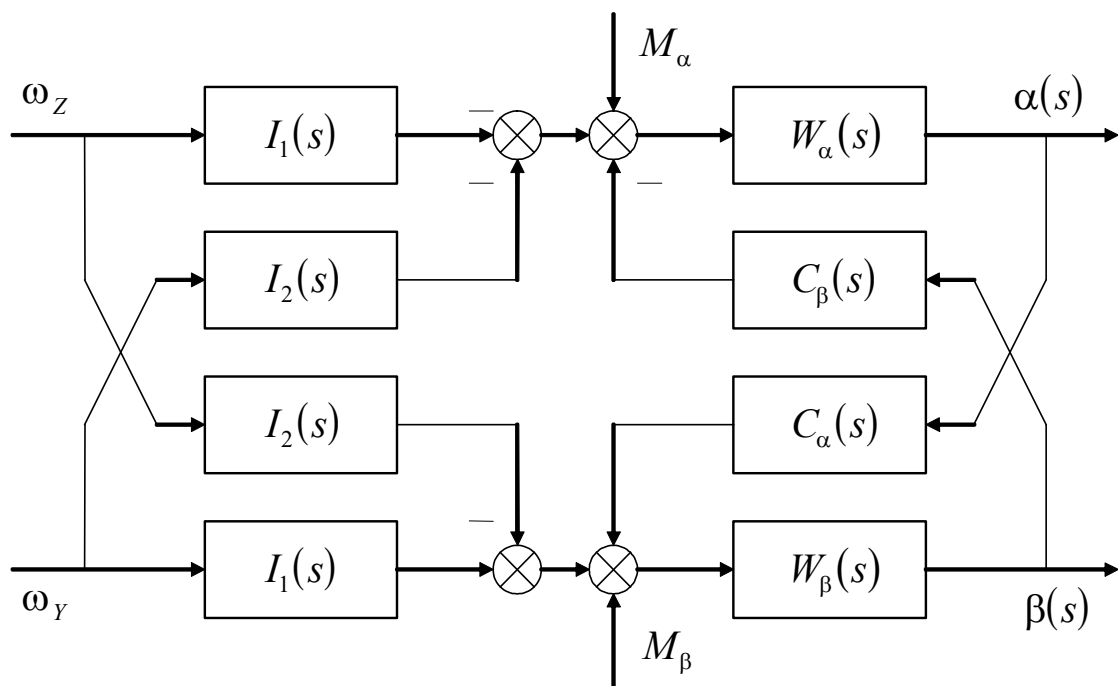


Рис. 6.34. Структурна схема чутливого елемента ДНГ

Тут введено наступні передатні функції, відповідні до рівнянь руху чутливого елемента:

$$W_{\alpha}(s) = W_{\beta}(s) = \frac{1}{Js^2 + h_1s + \Delta c}, \quad (6.45 \text{ а})$$

$$C_{\alpha}(s) = C_{\beta}(s) = Hs + h_2, \quad (6.45 \text{ б})$$

$$I_1(s) = H_0, \quad (6.45 \text{ в})$$

$$I_2(s) = Js. \quad (6.45 \text{ г})$$

Для досягнення в ДНГ необхідних якостей по швидкодії, діапазону вимірювання кутових швидкостей і автономності вимірювальних каналів необхідно організувати керування рухом його ротора із введенням зворотних зв'язків. Однак розв'язання цієї задачі методами аналітичного синтезу не при всіх постановках задач призводять до потрібного результату внаслідок фізичної неможливості реалізувати контури керування, або зниження захищеності системи від збурень. Вирішимо цю проблему в два етапи.

Розглянемо структурну схему датчика кутової швидкості на ДНГ, де аналогічно до попереднього випадку синтезу розв'язуючих систем, доповнимо її розв'язуючими контурами із передатними функціями D_{α} та D_{β} , а також додатковими зворотними зв'язками із передатними функціями B_{α} та B_{β} як показано на рис. 6.35.

Із врахуванням додаткових контурів на рис. 6.35, кути відхилення ротора будуть визначатися із системи рівнянь

$$\begin{cases} (1 - W_{\alpha}B_{\alpha})\alpha - W_{\alpha}(B_{\alpha}D_{\beta} - C_{\beta})\beta = W_{\alpha}U_{\alpha}, \\ -W_{\beta}(B_{\beta}D_{\alpha} + C_{\alpha})\alpha + (1 - W_{\beta}B_{\beta})\beta = W_{\beta}U_{\beta}, \end{cases} \quad (6.46)$$

де введено наступні позначення:

$$U_{\alpha} = -I_1\omega_z - I_2\omega_y + M_{\alpha},$$

$$U_{\beta} = I_1\omega_y - I_2\omega_z + M_{\beta}.$$

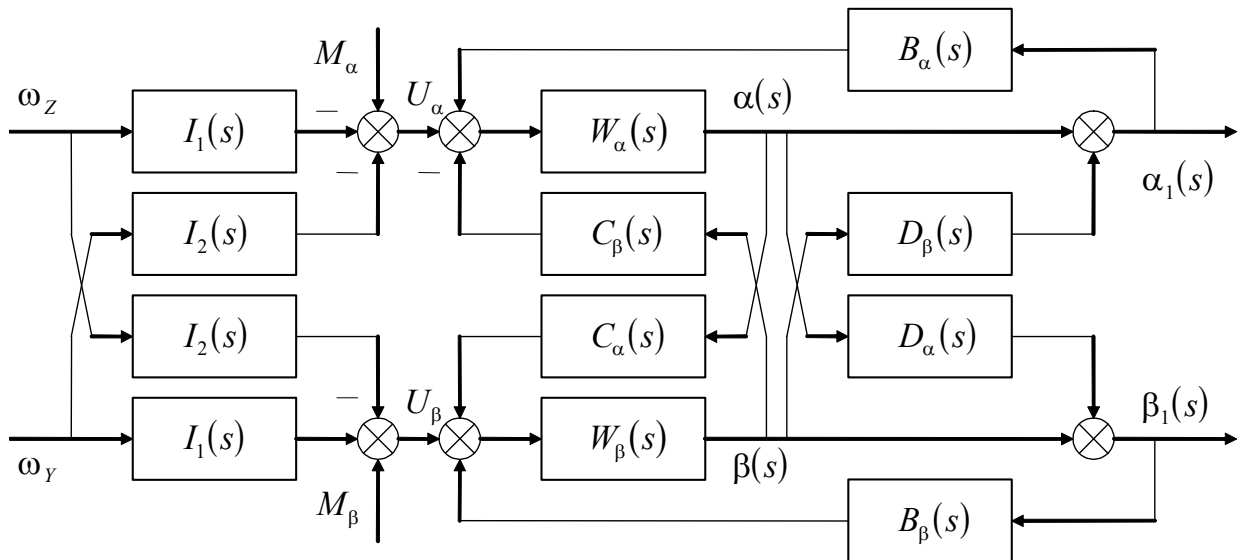


Рис. 6.35. Структурна схема датчика кутової швидкості з компенсаторами і зворотними зв'язками

З системи рівнянь (6.46) отримаємо

$$\alpha(s) = \Delta^{-1} W_{\alpha} \{ U_{\alpha} (1 - W_{\beta} B_{\beta}) + W_{\beta} U_{\beta} (B_{\alpha} D_{\beta} - C_{\beta}) \}, \quad (6.47)$$

$$\beta(s) = \Delta^{-1} W_{\beta} \{ U_{\beta} (1 - W_{\alpha} B_{\alpha}) + W_{\alpha} U_{\alpha} (B_{\beta} D_{\alpha} + C_{\alpha}) \}. \quad (6.48)$$

Тут

$$\Delta = (1 - W_{\alpha} B_{\alpha})(1 - W_{\beta} B_{\beta}) - W_{\alpha} W_{\beta} (B_{\alpha} D_{\beta} - C_{\beta})(B_{\beta} D_{\alpha} + C_{\alpha}).$$

Вихідні кути α_1 і β_1 , враховуючи вирази (6.47) і (6.48), будуть визначатися наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= \alpha + D_{\beta} \beta \\ &= \Delta^{-1} \{ W_{\alpha} (1 + C_{\alpha} D_{\beta} W_{\beta} + B_{\beta} W_{\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} - 1)) U_{\alpha} + W_{\beta} (D_{\beta} - C_{\beta} W_{\alpha}) U_{\beta} \}, \end{aligned} \quad (6.49 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= \beta + D_{\alpha} \alpha \\ &= \Delta^{-1} \{ W_{\beta} (1 - C_{\beta} D_{\alpha} W_{\alpha} + B_{\alpha} W_{\alpha} (D_{\alpha} D_{\beta} - 1)) U_{\beta} + W_{\alpha} (D_{\alpha} + C_{\alpha} W_{\beta}) U_{\alpha} \}. \end{aligned} \quad (6.49 \text{ б})$$

З аналізу співвідношень (6.49) неважко побачити, що якщо прийняти

$$D_\alpha = -C_\alpha W_\beta = -\frac{Hs + h_2}{Js^2 + h_1s + \Delta c}, \quad (6.50 \text{ а})$$

$$D_\beta = C_\beta W_\alpha = \frac{Hs + h_2}{Js^2 + h_1s + \Delta c}, \quad (6.50 \text{ б})$$

то для змінних α_1 і β_1 система на рис. 6.35 стає системою із розділеними каналами по вхідних моментах I_α і I_β , що діють на ротор ДНГ:

$$\alpha_1(s) = \frac{W_\alpha}{1 - B_\alpha W_\alpha} U_\alpha(s), \quad (6.51 \text{ а})$$

$$\beta_1(s) = \frac{W_\beta}{1 - B_\beta W_\beta} U_\beta(s). \quad (6.51 \text{ б})$$

Зауважимо, із виду виразів (6.51), що ці канали будуть являти собою коливальні ланки, охоплені зворотними в'язями із передатними функціями B_α і B_β відповідно. Це значно полегшує синтез передатних функцій контурів зворотного зв'язку, виходячи з умови забезпечення бажаних характеристик датчика кутової швидкості і якості перехідного процесу.

Задавши передатні функції контурів зворотного зв'язку у наступному виді:

$$B_\alpha(s) = B_\beta(s) = -k_c - k_H s, \quad (6.52)$$

знайдемо передатні функції утворених каналів

$$W_{\alpha 0}(s) = \frac{W_\alpha(s)}{1 - W_\alpha(s)B_\alpha(s)} = \frac{1}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_c)}, \quad (6.53 \text{ а})$$

$$W_{\beta 0}(s) = \frac{W_\beta(s)}{1 - W_\beta(s)B_\beta(s)} = \frac{1}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_c)}. \quad (6.53 \text{ б})$$

Передатні функції системи щодо вимірюваних кутових швидкостей ω_γ , ω_z мають наступний вигляд:

$$G_{\omega_Z}(s) = \frac{\alpha_1(s)}{\omega_Z(s)} = -I_1(s)W_{\alpha_0}(s) = -\frac{H_0}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_C)}, \quad (6.54 \text{ а})$$

$$G_{\omega_Y}(s) = \frac{\beta_1(s)}{\omega_Y(s)} = I_1(s)W_{\beta_0}(s) = \frac{H_0}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_C)}, \quad (6.54 \text{ б})$$

$$G_{v_{\omega_Z}}(s) = \frac{\beta_1(s)}{\omega_Z(s)} = -I_2(s)W_{\beta_0}(s) = -\frac{Js}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_C)}, \quad (6.54 \text{ в})$$

$$G_{v_{\omega_Y}}(s) = \frac{\alpha_1(s)}{\omega_Y(s)} = -I_2(s)W_{\alpha_0}(s) = -\frac{Js}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + (\Delta c + k_C)}, \quad (6.54 \text{ г})$$

та свідчать про наявність перехресної чутливості вимірника.

Компенсація перехресною чутливості

Для усунення перехресної чутливості датчика сформуємо контур обробки сигналів α_1 , β_1 за розробленим у попередньому розділі методом за схемою, яка показана на рис. 6.36, при цьому не порушуючи якість початкової системи на рис. 6.35.

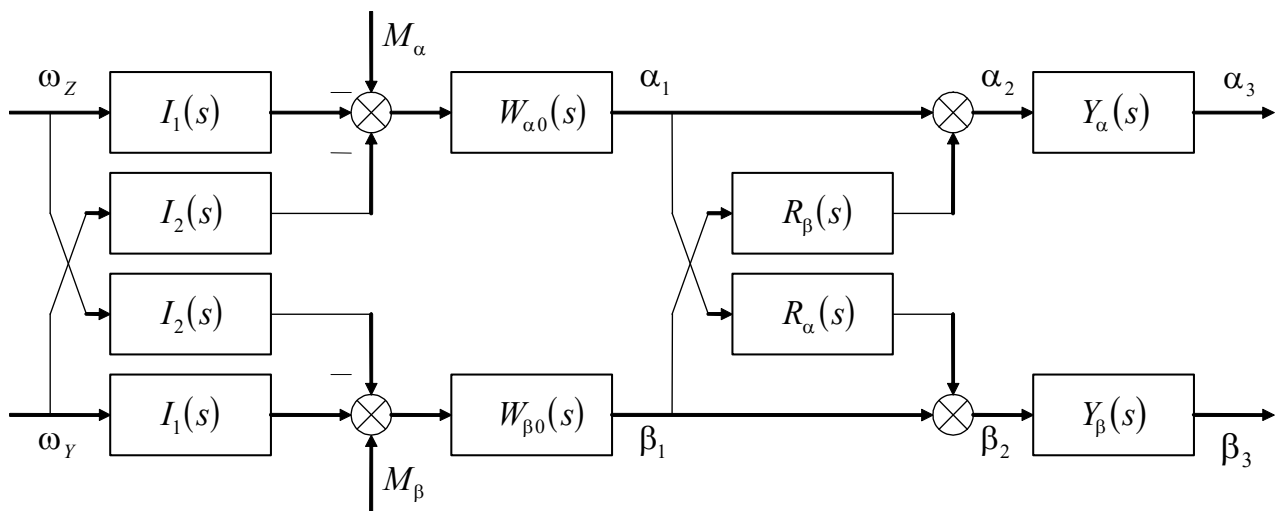


Рис. 6.36. Схема без перехресної чутливості

Для схеми на рис. 6.36 сигнали α_2 і β_2 будуть обчислюватися за формулами

$$\alpha_2(s) = -(W_{\alpha 0} I_1 + R_{\beta} W_{\beta 0} I_2) \omega_z - (W_{\alpha 0} I_2 - R_{\beta} W_{\beta 0} I_1) \omega_y + W_{\alpha 0} M_{\alpha} + R_{\beta} W_{\beta 0} M_{\beta}, \quad (6.55 \text{ а})$$

$$\beta_2(s) = (W_{\beta 0} I_1 - R_{\alpha} W_{\alpha 0} I_2) \omega_y - (W_{\beta 0} I_2 + R_{\alpha} W_{\alpha 0} I_1) \omega_z + W_{\beta 0} M_{\beta} + R_{\alpha} W_{\alpha 0} M_{\alpha}. \quad (6.55 \text{ б})$$

З аналізу виразів (6.55) легко бачити, що як і у випадку вібраційних коріолісових гіроскопів, перехресна чутливість ДНГ усувається при

$$R_{\alpha} = -\frac{W_{\beta 0} I_2}{W_{\alpha 0} I_1} = -\frac{Js}{H_0}. \quad (6.56 \text{ а})$$

$$R_{\beta} = \frac{W_{\alpha 0} I_2}{W_{\beta 0} I_1} = \frac{Js}{H_0}. \quad (6.56 \text{ б})$$

Тоді вирази (6.55) набудуть вигляду

$$\alpha_2(s) = -W_{\alpha 0} \left(\frac{I_1^2 + I_2^2}{I_1} \right) \omega_z + W_{\alpha 0} \left(M_{\alpha} + \frac{I_2}{I_1} M_{\beta} \right), \quad (6.57 \text{ а})$$

$$\beta_2(s) = W_{\beta 0} \left(\frac{I_1^2 + I_2^2}{I_1} \right) \omega_y + W_{\beta 0} \left(M_{\beta} - \frac{I_2}{I_1} M_{\alpha} \right), \quad (6.57 \text{ б})$$

а передатні функції по кутовим швидкостям, що вимірюються, будуть

$$G_z(s) = \frac{\alpha_2(s)}{\omega_z(s)} = -\frac{H_0^2 + J^2 s^2}{H_0 [Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_c]}, \quad (6.58 \text{ а})$$

$$G_y(s) = \frac{\beta_2(s)}{\omega_y(s)} = \frac{H_0^2 + J^2 s^2}{H_0 [Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_c]}. \quad (6.58 \text{ б})$$

Подвійне диференціювання в чисельнику передатних функцій (6.58) призводить до значних похибок при вимірюванні кутових швидкостей, що швидко змінюються, і низькій перешкодозахищеності системи. Тому задамо передатні функції Y_{α} й Y_{β} у вигляді

$$Y_{\beta} = -Y_{\alpha} = \frac{H_0 K_0}{H_0^2 + J^2 s^2}, \quad (6.59)$$

для яких

$$G_{z_0}(s) = \frac{\alpha_3(s)}{\omega_z(s)} = G_{y_0}(s) = \frac{\beta_3(s)}{\omega_y(s)} = \frac{K_0}{Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C}, \quad (6.60)$$

де K_0 - бажаний коефіцієнт підсилення. У цьому випадку статичні коефіцієнти передачі K_z і K_y по відповідним компонентам вектора переносної кутової швидкості, що вимірюються, будуть визначатися співвідношеннями

$$K_y = K_z = \frac{K_0}{\Delta c + k_C}. \quad (6.61)$$

Якщо задана бажані частота резонансу ω_0 і відносне демпфування ζ_0 коливальної ланки, яким є вимірювальний канал датчика, можемо отримати необхідні коефіцієнти контуру зворотного зв'язку (6.52)

$$k_C = J\omega_0^2 - \Delta c, \quad (6.62 \text{ а})$$

$$k_H = -h_1 + J\zeta_0\omega_0. \quad (6.62 \text{ б})$$

Як показує досвід, вибір коефіцієнтів зворотного зв'язку необхідно робити також з урахуванням необхідного зниження коливальності ротора ДНГ, тому що його максимальні кути відхилення обмежені.

Стійкість датчика кутової швидкості

Для аналізу стійкості ДНГ скористаємося характеристичним рівнянням системи (6.46), що з урахуванням виразів для передатних функцій (6.45) і (6.52) приймає вигляд

$$\Delta(s) = [Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C]^2 [(Hs + h_2)^2 + (Js^2 + h_1s + \Delta c)^2]. \quad (6.63)$$

Корені рівняння (6.63) можуть бути знайдені з рішень системи двох рівнянь

$$\begin{cases} Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C = 0, \\ (Hs + h_2)^2 + (Js^2 + h_1s + \Delta c)^2 = 0. \end{cases}$$

Корені першого рівняння будуть

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2J}(h_1 + k_H) \pm \frac{1}{2J}\sqrt{(h_1 + k_H)^2 - 4J(\Delta c + k_C)}. \quad (6.64)$$

Зауважимо, що тільки перше рівняння залежить від параметрів контурів зворотного зв'язку, і має кратність, що дорівнює двом. Корені другого рівняння системи будуть

$$s_{3,4} = \frac{1}{2J}(-h_1 - iH) \pm \frac{1}{2J}\sqrt{-(H - ih_1)^2 - 4J(\Delta c + ih_2)^2}, \quad (6.65 \text{ а})$$

$$s_{5,6} = \frac{1}{2J}(-h_1 + iH) \pm \frac{1}{2J}\sqrt{-(H + ih_1)^2 - 4J(\Delta c - ih_2)^2}. \quad (6.65 \text{ б})$$

Корені (6.65) характеристичного рівняння залежать тільки від параметрів ДНГ. Для реальних ДНГ вони є комплексно спряженими з від'ємними дійсними частинами, що відповідає стійкому стану системи за критерієм Ляпунова.

Аналіз виразів (6.64) показав, що ці корені можуть бути комплексно спряженими, або дійсними, в залежності від параметрів k_C і k_H , але в обох випадках із від'ємною дійсною частиною, що говорить про стійкість системи. З погляду на якість системи доцільно вибирати параметри так, щоб корені були дійсними. Це буде мати місце у випадку, коли

$$k_H > -h_1 + 2\sqrt{J(\Delta c + k_C)}. \quad (6.66)$$

Крім умови (6.66) обидва коефіцієнти k_C і k_H повинні бути додатними, що відповідає від'ємному зворотному зв'язку і зниженню коливальності ротора ДНГ.

Чутливість до змін параметрів чутливого елемента

Як видно з формул (6.50), у передатних функціях контуру керування присутні параметри ДНГ, що можуть змінюватися під час роботи приладу. До них відносяться залишкова динамічна жорсткість Δc і коефіцієнт демпфування h_2 . Це призведе до порушення співвідношень (6.50) і, отже, до небажаних явищ у системі. Внесення відповідних змін у коефіцієнти передатних функцій (6.50) у процесі роботи приладу призводить до значного ускладнення процесу оброблення вихідних сигналів. Оцінимо похибки виміру кутової швидкості, викликані зміною параметрів ДНГ.

Задамо залишкову жорсткість у такий спосіб:

$$\Delta c = \Delta c_0(1 + \delta c),$$

де δc - малий коефіцієнт зміни залишкової жорсткості, що не має розмірності, а Δc_0 - початкове значення залишкової жорсткості, використовуване в передатних функціях (6.50). Для сталого режиму отримаємо

$$\alpha_3 = K_0 \frac{[(\Delta c_0 + k_c)(\Delta c_0^2 + h_2^2) + \Delta c_0^3 \delta c] \omega_z - h_2 \delta c \Delta c_0^2 \omega_y}{(\Delta c_0^2 + h_2^2)(\Delta c_0 + k_c)^2 + 2\Delta c_0^3(\Delta c_0 + k_c) + \Delta c_0^4 \delta c^2}. \quad (6.67)$$

Через симетричність вимірювальних каналів вираз для β_3 буде аналогічним (6.67), але з відповідними компонентами вектора кутової швидкості. Розкладання в ряд по малому параметрові δc й утримання його першого ступеня дає

$$\alpha_3 \approx \frac{K_0}{\Delta c_0 + k_c} \omega_z - \frac{\Delta c_0^2 K_0 (h_2 \omega_y + \Delta c_0 \omega_z)}{(\Delta c_0^2 + h_2^2)(\Delta c_0 + k_c)^2} \delta c. \quad (6.68)$$

Чисельні розрахунки по формулі (6.68) для реальних параметрів показують, що похибка виміру кутової швидкості від зміни залишкової жорсткості в декілька разів ($\delta c \geq 1$) не є істотною (приблизно на 5 порядків менше від основного сигналу).

Представимо тепер параметр h_2 у вигляді

$$h_2 = h_{20}(1 + \delta h_2).$$

Тут δh_2 - безрозмірний малий коефіцієнт зміни параметра h_2 , а h_{20} його незбурене значення. Сигнал α_3 у сталому режимі буде

$$\alpha_3 = K_0 \frac{[(\Delta c + k_c)(\Delta c^2 + h_{20}^2) + h_{20}^2 \Delta c \delta h_2] \omega_z + h_{20} \delta h_2 \Delta c^2 \omega_y}{(\Delta c^2 + h_{20}^2)(\Delta c + k_c)^2 + 2h_{20}^2 \Delta c (\Delta c + k_c) \delta h_2 + \Delta c^2 h_{20}^2 \delta h_2^2}. \quad (6.69)$$

Після розкладання виразу (6.69) у ряд по малому параметрові δh_2 й утримання його першого ступеня отримуємо

$$\alpha_3 \approx \frac{K_0}{\Delta c + k_c} \omega_z + \frac{K_0 h_{20} \Delta c (\Delta c \omega_y - h_{20} \omega_z)}{(\Delta c^2 + h_{20}^2)(\Delta c + k_c)^2} \delta h_2. \quad (6.70)$$

Таким чином, з аналізу виразів (6.68) і (6.70) випливає, що для датчика кутової швидкості, побудованого за схемою рис. 6.36, зміни параметрів ДНГ не впливають істотно на точність виміру кутової швидкості.

Числове моделювання

На основі наведених результатів було виконано числове моделювання з параметрами реального приладу. При моделюванні приймалося, що ω_z має гармонійний характер з амплітудою 1 рад/с і частотою 100 Гц. Кутова швидкість ω_y подана прямокутним сигналом з амплітудою 1 рад/с і 15% широкосмуговим білим шумом. Отримані результати моделювання подані графічно на рис. 6.37 і 6.38.

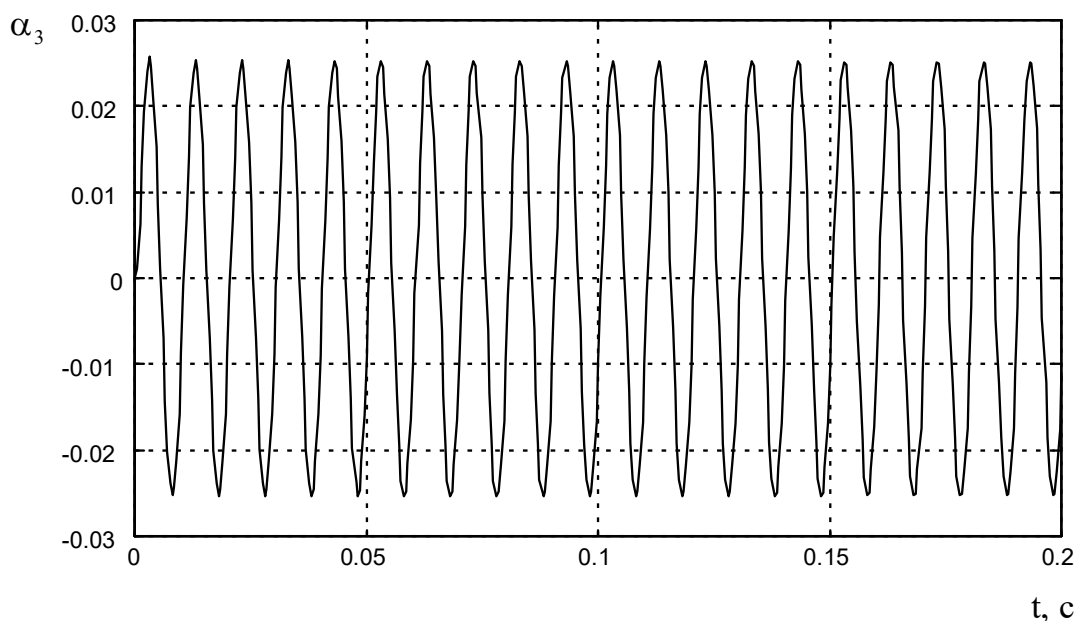


Рис. 6.37. Вихідний сигнал α_3

Аналіз цих графіків показує, що перехресна чутливість відсутня, а шум дещо послаблюється.

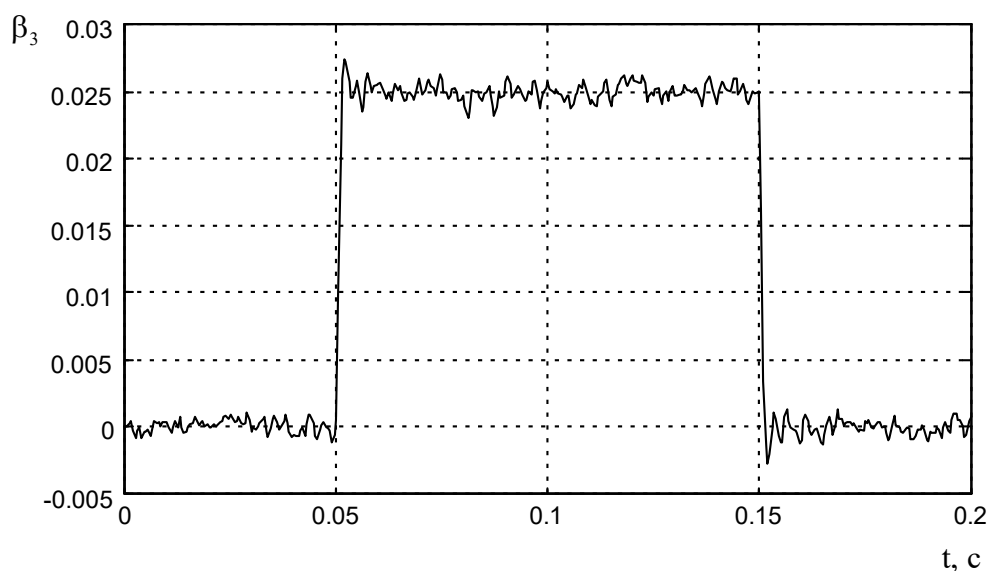


Рис. 6.38. Вихідний сигнал β_3

Зменшення впливу збурень та смуга пропускання

Як показує аналіз виразів (6.55), якщо прийняти передатні функції Y_α й Y_β у вигляді (6.59), тоді передатні функції для α_3 по збурюючих моментах будуть

$$V_\alpha(s) = \frac{\alpha_3(s)}{M_\alpha(s)} = W_{\alpha 0} Y_\alpha = - \frac{H_0 K_0}{[Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C](H_0^2 + J^2 s^2)},$$

$$V_\beta(s) = \frac{\alpha_3(s)}{M_\beta(s)} = W_{\alpha 0} Y_\alpha \frac{I_2}{I_1} = - \frac{JK_0 s}{[Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C](H_0^2 + J^2 s^2)}.$$

Очевидно, що по обох моментах M_α та M_β буде мати місце необмежений по амплітуді резонанс на нутаційній частоті H_0/J . Одним із можливих способів обмеження цього резонансу може стати вибір передатних функцій Y_α і Y_β у вигляді

$$Y_\beta = -Y_\alpha = \frac{H_0 K_0}{H_0^2 + h_3 s + J^2 s^2},$$

де параметр h_3 вибирається з умов необхідного придушення збурень на резонансній частоті. У цьому випадку передатні функції по кутовій швидкості (6.60) приймуть вигляд

$$G_{z_0}^*(s) = \frac{\alpha_3(s)}{\omega_z(s)} = G_{y_0}^*(s) = \frac{\beta_3(s)}{\omega_y(s)} = \frac{K_0 (H_0^2 + J^2 s^2)}{[Js^2 + (h_1 + k_H)s + \Delta c + k_C](H_0^2 + h_3 s + J^2 s^2)}. \quad (6.71)$$

У такий спосіб виникає додаткове спотворення вихідного сигналу в порівнянні з (6.60). Однак для досить широкого діапазону частот кутових швидкостей, які, у той же час, менші за нутаційну частоту гіроскопа, це спотворення неістотне. З аналізу виразу (6.71) отримаємо наступний вираз для ширини смуги пропускання датчика ($[f_{\max}] = \Gamma$):

$$f_{\max} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{2a_4}} \left[-a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_4\delta G} \right]^{1/2}, \quad (6.72)$$

де параметри задаються наступними виразами:

$$a_2 = \frac{h_3^2(\Delta c + k_c)^2 + H_0^4 \left[(h_1 + k_H)^2 - 2J(\Delta c + k_c) \right]}{2H_0^4(\Delta c + k_c)^2},$$

$$a_4 = (8H_0^8)^{-1}(\Delta c + k_c)^{-4} \left[8H_0^2 h_3^2 J(\Delta c + k_c)^4 - 3h_3^4(\Delta c + k_c)^2 + \right. \\ \left. + 2H_0^4 h_3^2(\Delta c + k_c)^2 \left[2J(\Delta c + k_c) - (h_1 + k_H)^2 \right] - H_0^8 \left[3h_1^4 + 8J^2(\Delta c + k_c)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 12h_1^3 k_H - 12J(\Delta c + k_c)k_H^2 + 3k_H^4 - 6h_1^2(2J(\Delta c + k_c) - 3k_H^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + 12h_1 k_H(k_H^2 - 2J(\Delta c + k_c)) \right] \right],$$

при цьому

$$\delta G = \left[G_{z_0}^*(0) - G_{z_0}^*(2\pi f) \right] / G_{z_0}^*(0)$$

є максимальна припустима відносна похибка вимірювання кутової швидкості по амплітуді для всіх частот, менших за f_{\max} . Формула (6.72) дає досить точні значення для частот, не більших за нутаційну H_0/J . Зміщення фази переносної кутової швидкості буде

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\omega \left[h_3(\Delta c + k_c) + H_0^2(h_1 + k_H) \right] - J\omega^3 \left[h_3 + J(h_1 + k_H) \right]}{H_0^2(\Delta c + k_c) - \left[JH_0^2 + J^2(\Delta c + k_c) + h_3(h_1 + k_H) \right] \omega^2 + J^3 \omega^4} \right]. \quad (6.73)$$

На рис. 6.39 і 6.40 зображені відповідні до (6.72) та (6.73) логарифмічна амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики.

Таким чином було застосовано метод синтезу систем компенсації небажаних перехресних зв'язків для коріолісових вібраційних гіроскопів до синтезу двохкомпонентного датчика кутової швидкості на основі ДНГ.

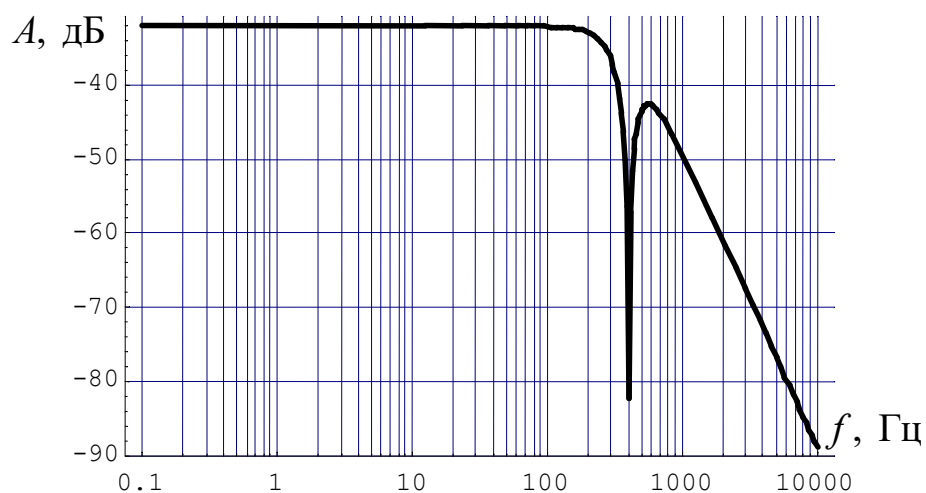


Рис. 6.39. Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

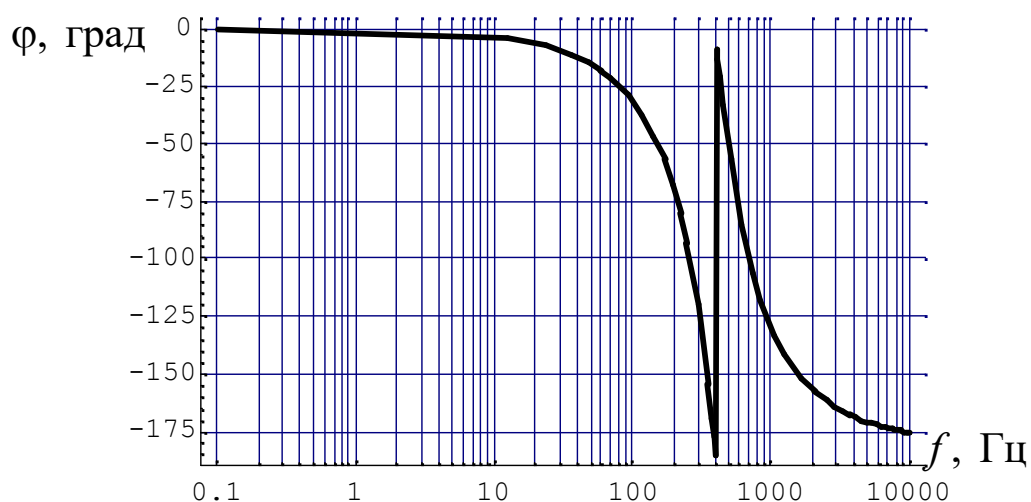


Рис. 6.40. Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

6.8 Компенсація температурних похибок

Одним із добре знаних головних джерел зсуву нуля в КВГ є зміни температури. Вони також впливають практично на всі характеристики КВГ. Наступні рисунки демонструють значний пов'язаний із температурою вихід при нульовій швидкості, який спостерігався під час експериментальних

випробувань КВГ. Для температурного профілю, показаному на рис. 6.41, і нульової кутової швидкості, некомпенсований вихід КВГ показаний на рис. 6.42.

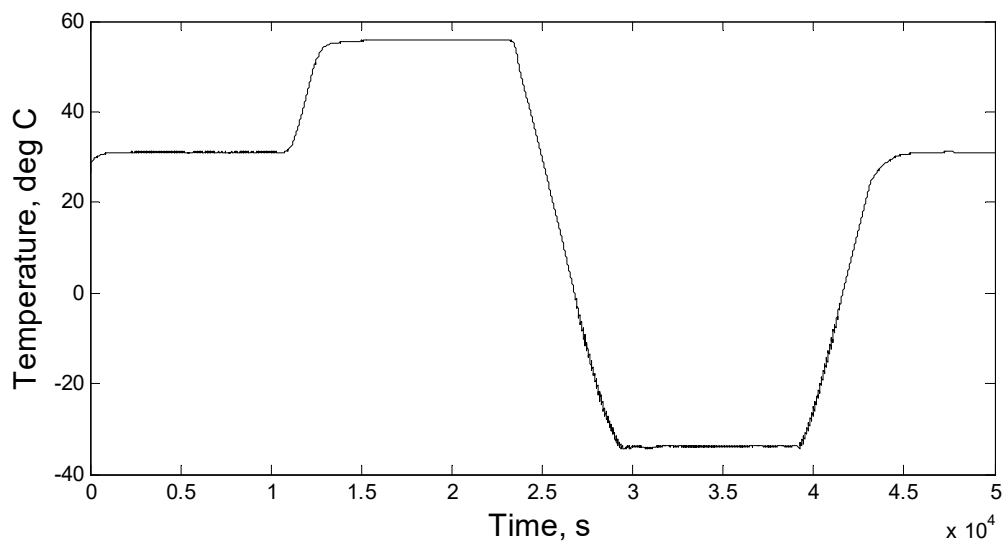


Рис. 6.41. Температурний профіль

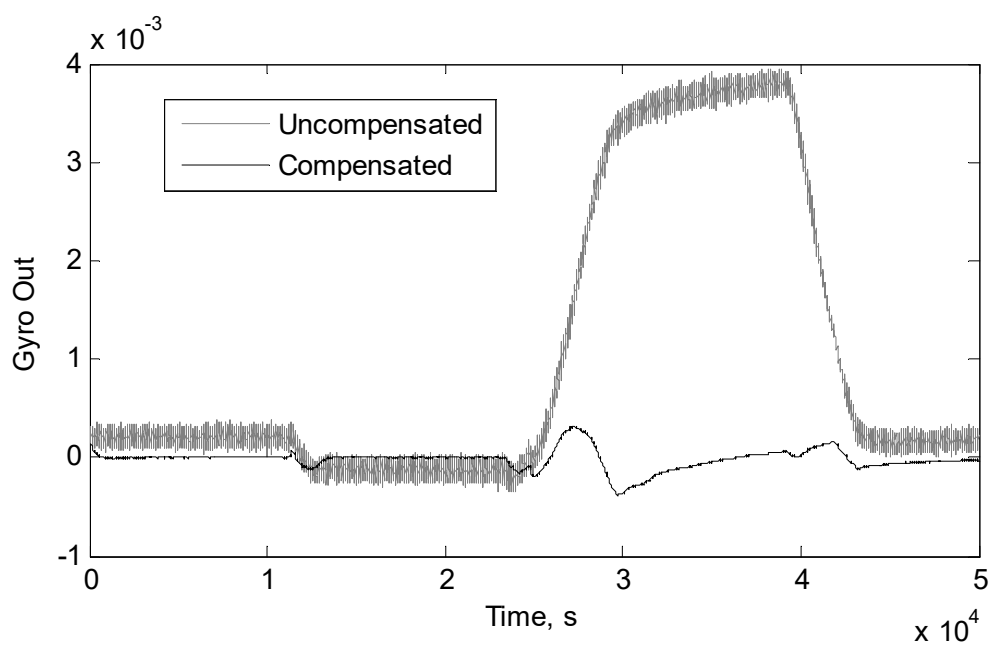


Рис. 6.42. Вихід КВГ без компенсації температури і з нею

Вважається, що зміни температури викликають зсув нуля через перехресне демпфування, що залежить від температури.

В цьому випадку збуджені первинні коливання чутливого елемента здатні спричинити вторинні (вихідні) коливання навіть без зовнішнього обертання, прикладеного до датчика.

Математична модель впливу температури

Поглянемо на рівняння руху чутливого елемента, коли пов'язане з температурою перехресне демпфування присутнє в системі:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 + (g_1\Omega + 2\zeta_{21}\omega_2)\dot{x}_2 + d_3\dot{\Omega}x_2 = q_1(t), \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 - (g_2\Omega + 2\zeta_{12}\omega_1)\dot{x}_1 - \dot{\Omega}x_1 = q_2(t). \end{cases} \quad (6.74)$$

Тут ζ_{12} і ζ_{21} є відносними коефіцієнтами перехресного демпфування. Справді, навіть якщо немає зовнішнього обертання ($\Omega = 0$), вторинні коливання, лінійно пов'язані з ζ_{12} , все ще будуть реєструватися.

Постійний перехресний зв'язок через демпфування може бути усунений калібруванням. Однак, калібрування не може ефективно поводитися із змінним у часі через зміни температури демпфуванням ζ_{12} .

Виведемо тепер математичну модель для виходу, який спричинений змінами температури. Йдучи слідом продемонстрованого в четвертому розділі методу аналізу динаміки чутливого елемента КВГ в демодульованих сигналах, можна представити комплексну вторинну амплітуду в області Лапласа як:

$$A_2(s) = W_2^\Omega(s) \cdot \Omega(s) + W_2^\zeta(s) \cdot \zeta_{12}(s). \quad (6.75)$$

Тут передатна функція задається наступними виразами:

$$W_2^\Omega(s) = \frac{q_{10}(j\omega g_2 + d_4 s)}{[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 \omega_2 (s + j\omega) + \omega_2^2](\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega_1 \zeta_1 \omega)},$$

$$W_2^\zeta(s) = \frac{2j\omega \omega_2}{[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 \omega_2 (s + j\omega) + \omega_2^2](\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega_1 \zeta_1 \omega)}.$$
(6.76)

Важливо пам'ятати, що частина вторинної амплітуди через перехресне демпфування буде нерозрізною від частини, спричиненою кутовою швидкістю. Отже, давайте виведемо передатну функцію, що встановлює зв'язок вхідного перехресного демпфування з вихідною кутовою швидкістю, як

$$\Omega^\zeta(s) = W_\Omega^\zeta(s) \cdot \zeta_{12}(s),$$
(6.77)

де $\Omega^\zeta(s)$ є вимірною помилковою кутовою швидкістю, спричиненою перехресним демпфуванням. Безсумнівно, передатна функція $W_\Omega^\zeta(s)$ може бути вираженою із використанням передатної функції із (6.76) наступним чином

$$W_\Omega^\zeta(s) = \frac{W_2^\zeta(s)}{W_2^\Omega(s \rightarrow 0)}$$

$$= \frac{2\omega_2(\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega_2 \omega \zeta_2)}{g_2(\omega_2^2 - \omega^2 + 2\omega_2 \zeta_2 s + 2j\omega(s + \omega_2 \zeta_2))}.$$
(6.78)

Передатну функцію (6.78) можна далі спростити, застосовуючи припущення, подібні до тих, що використовувались в Розділі 4. А саме, можна припустити, що парціальні частоти є рівними ($\omega_1 = \omega_2 = k$), як і відносні коефіцієнти демпфування ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$), і частота збудження первинних коливань є

$$\omega = k\sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

З цими припущеннями передатна функція (6.48) стає

$$W_\Omega^\zeta(s) = \frac{2k^2 \zeta}{g_2(s + k\zeta)}.$$
(6.79)

Передатна функція (6.79) дозволяє ефективно аналізувати похибки через перехресне демпфування, як не тільки є наявними в системі, але й можуть змінюватися завдяки різним причинам.

Температурні коефіцієнти

Припускаючи, що коефіцієнт перехресного демпфування є функцією температурного зсуву T від температури калібрування, він може бути апроксимований, застосовуючи поліном, наступним чином:

$$\zeta_{12} = \zeta_{12}(T) \approx \sum_{i=0}^n \zeta_i^T T^i . \quad (6.80)$$

Пов'язані із температурою коефіцієнти ζ_i^T можна визначити експериментально, коли відома (виміряна) навколишня температура і кутова швидкість відсутня (див. рис. 6.41 і 6.42). Однак, у більшості випадків ми спостерігаємо кутову швидкість як вихід гіроскопа. Для того, щоб зв'язати кутову швидкість з вхідним перехресним демпфуванням, застосуємо усталений стан передатної функції (6.79) як

$$\Omega(T) = W_{\Omega}^{\zeta}(s \rightarrow 0) \zeta_{12}(T) \approx \frac{2k}{g_2} \sum_{i=0}^n \zeta_i^T T^i = \sum_{i=0}^n \Omega_i^T T^i . \quad (6.81)$$

Параметри Ω_i^T моделі (6.81) перехресного демпфування можуть тепер бути ідентифікованими з експериментальних даних і мають наступні знайдені величини:

$$\Omega_0^T = 1.0792 \cdot 10^{-3} ,$$

$$\Omega_1^T = -4.631 \cdot 10^{-5} ,$$

$$\Omega_2^T = 7.7044 \cdot 10^{-7} ,$$

$$\Omega_3^T = -5.8598 \cdot 10^{-9} .$$

Знайдено, що вплив складових високого порядку є незначним. Для того, щоб надати чинності моделі (6.81) перехресного демпфування, отримана кутова швидкість, пов'язана із температурою, має бути віднята з виходу гіроскопа, продукуючи скомпенсований вихід, як показано на рис. 6.42 (скомпенсована лінія). Як можна бачити, модель (6.81) успішно компенсує зсув нуля ля усталеної температури, тоді як під час температурних перепадів виконує це значно гірше.

Система компенсації температурних похибок

Для того, щоб успішно справлятися з перехідними процесами в динаміці чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа через зміни температури, давайте синтезуємо систему компенсації температури, застосовуючи техніку компенсації перехресного зв'язку, описану в цьому розділі раніше.

Структура простої часткової розв'язуючої системи показана на рис. 6.26. У випадку температури відповідна передатна функція $G_2(s)$ компенсації перехресного демпфування в розв'язаній системі задається виразом

$$G_2(s) = \frac{2\zeta_{12}\omega_1 s}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}. \quad (6.82)$$

Тут ζ_{12} є залежним від температури коефіцієнтом перехресного демпфування, заданим (6.80). Беручи температурні виміри з температурного датчика, можна тепер об'єднувати ці показання з вимірними первинними коливаннями для компенсації температурних похибок на низькому рівні (перед демодуляцією), як показано на рис. 6.43.

Числове моделювання роботи системи

Перевіримо тепер ефективність роботи системи компенсації температурних похибок за допомогою числового моделювання.

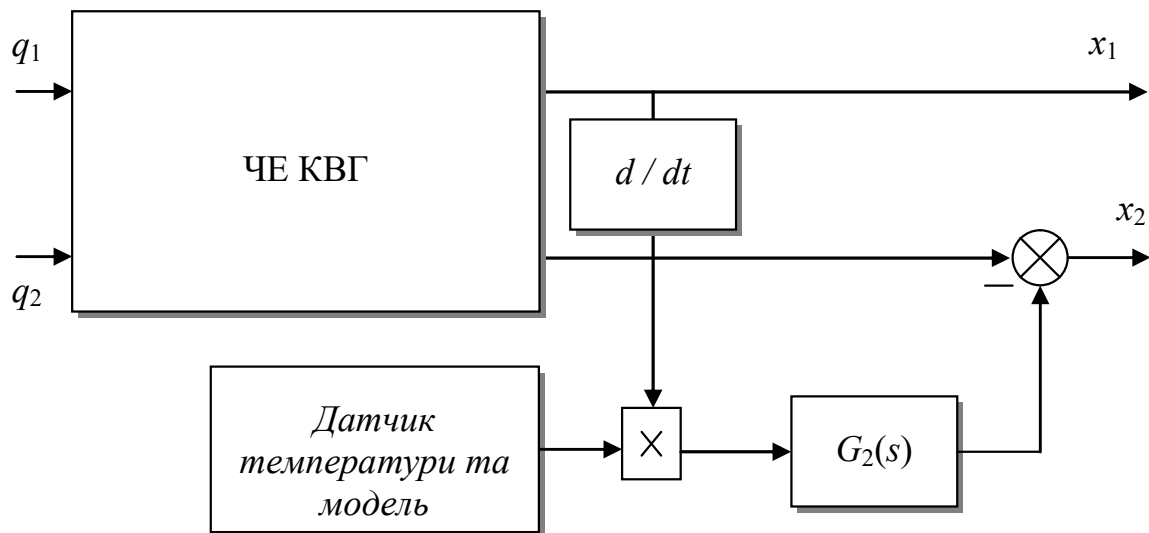


Рис. 6.43. Система температурної компенсації низького рівня

Узагальнена схема числового моделювання в середовищі Simulink/Matlab показана на рис. 6.44. На цій схемі "швидкість" відповідає до уявної кутової швидкості, яка викликана виключно впливом температури. Ця уявна "швидкість" заведена до динаміки чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа (блок ЧЕ КВГ) як показано на рис. 6.45.

Моделювання системи компенсації температурного впливу (блок "Система компенсації") проводиться за допомогою схеми, показаної на рис. 6.46. Температурна модель (6.81) моделюється відповідним блоком, зміст якого показано на рис. 6.47. Нарешті результати числового моделювання роботи цієї системи показані на рис. 6.48.

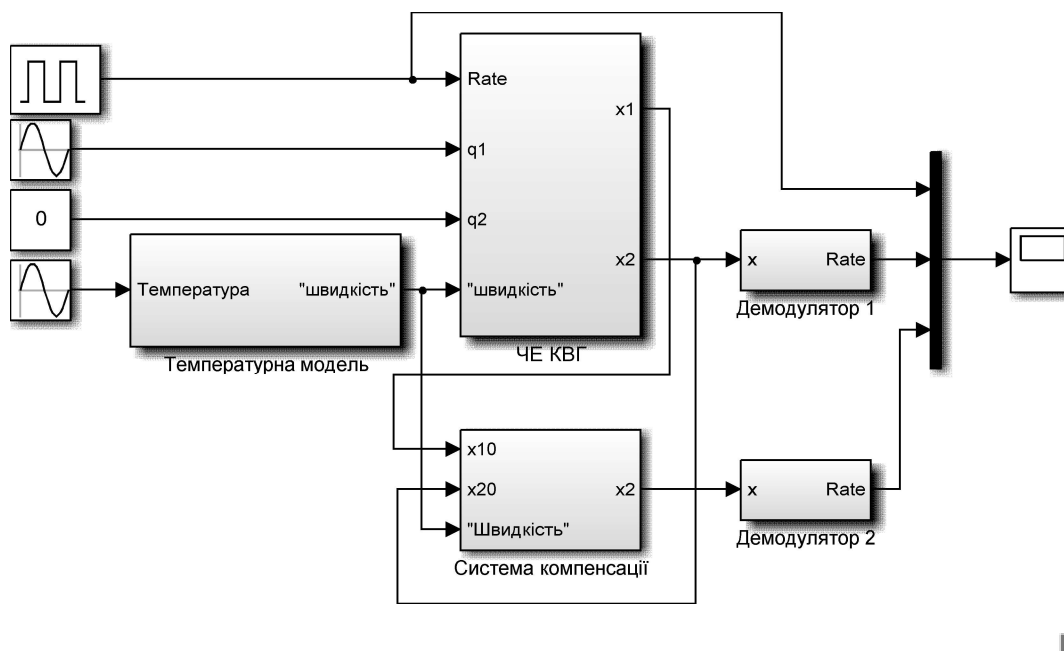


Рис. 6.44. Система числового моделювання роботи системи температурної компенсації

При цьому числовому моделюванні було прийнято, що температура має синусоїдальну форму в діапазоні від -50 до $+50$ градусів Цельсія і період в 1 с.

Можна бачити, що запропонована система температурної компенсації успішно усуває ефект варіацій перехресного демпфування через температуру.

Тим не менш важливо зазначити, що така система все ще потребує наявності температурного датчика, який використовується в системі, а також емпіричної моделі впливу температури на динаміку чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа.

Виключити із системи датчик температури можна, якщо описати зміни температури як певний стохастичний процес та задатися його статистичними характеристиками.

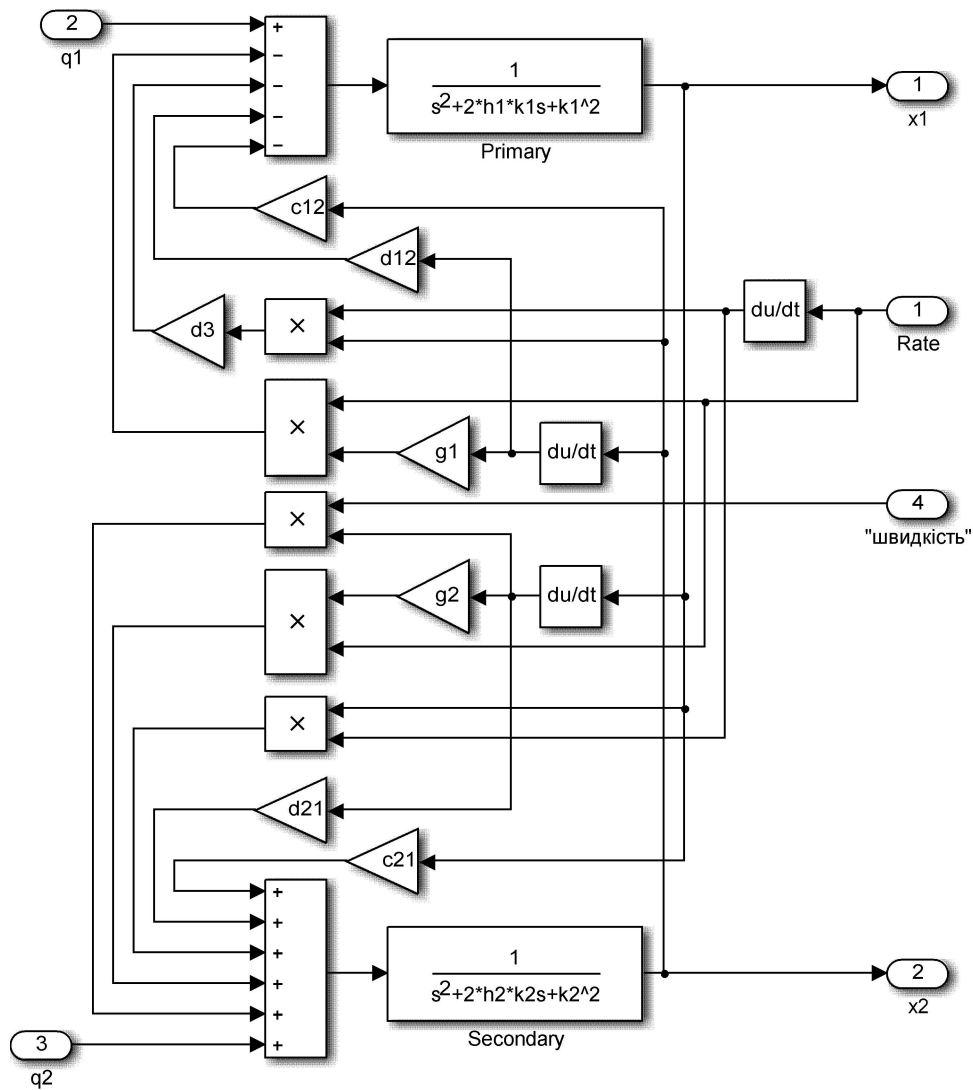


Рис. 6.45. Моделювання динаміки чутливого елемента із уявною кутовою швидкістю залежної від температури

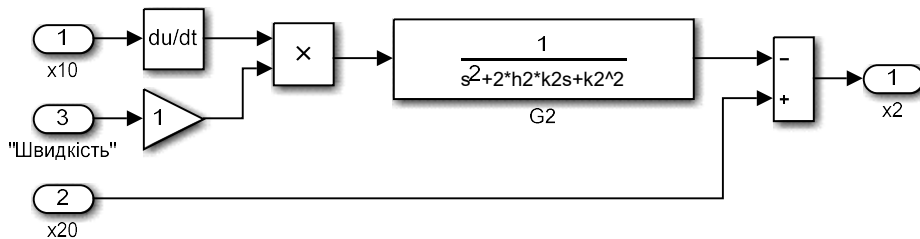


Рис. 6.46. Блок "Система компенсації"

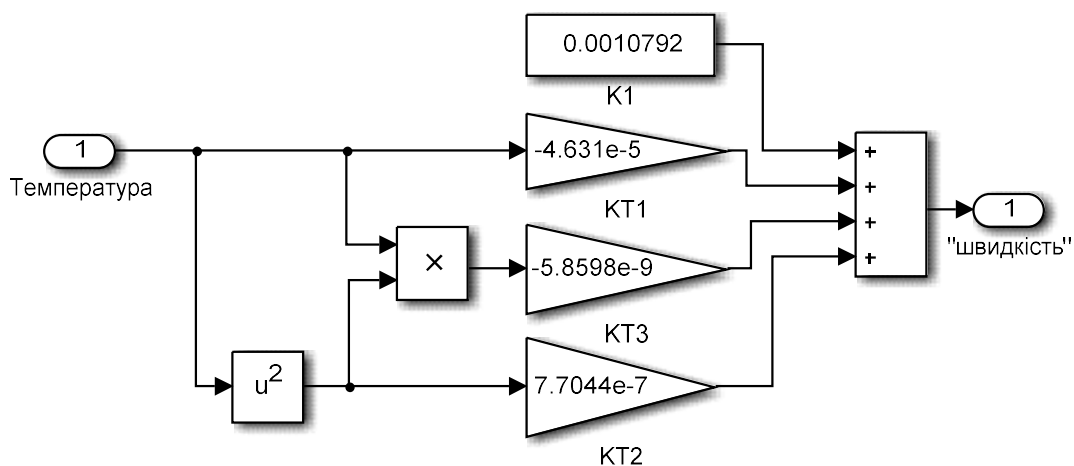


Рис. 6.47. Блок "Температурна модель"

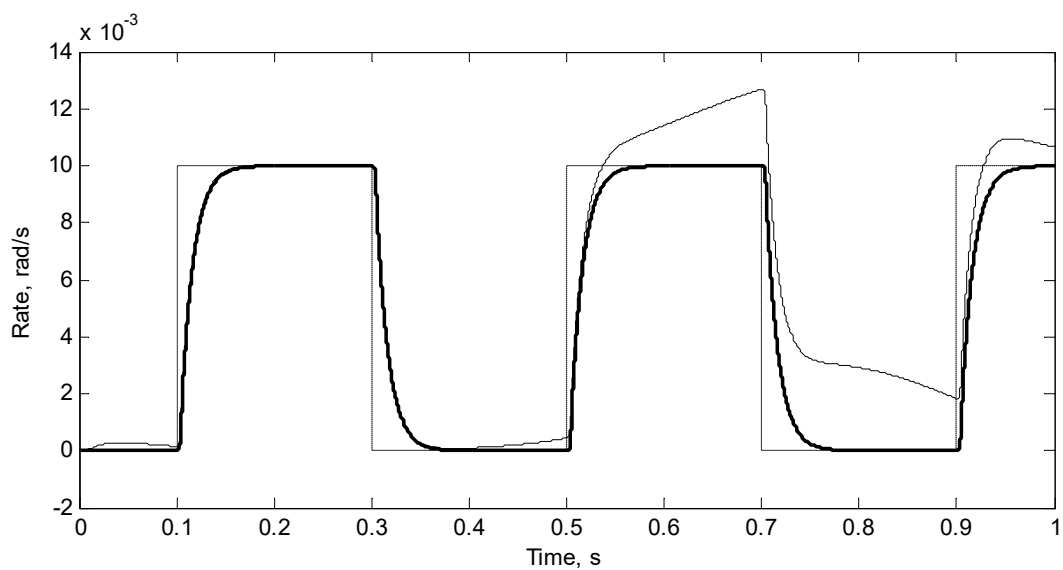


Рис. 6.48. Моделювання системи температурної компенсації
(пунктирна лінія – вхідна кутова швидкість, тонка лінія – некомпенсований вихід, товста лінія – компенсований вихід)

Статистична фільтрація температурних похибок

Аналізуючи (6.75) можна помітити, що температура впливає на вихід КВГ точно так, як кутова швидкість, і вихід, пов'язаний із температурою, є нерозрізненним від вимірювань кутової швидкості:

$$\Omega(s) = W(s) \cdot \Omega_0(s) + W_\zeta(s) \cdot \zeta_{12}(s). \quad (6.83)$$

Тут $W(s)$ є передатною функцією системи, заданою (6.1), і $W_\zeta(s)$ є передатною функцією перехресного демпфування, заданою виразом (6.79). В цьому сенсі вплив температури міг би трактуватись як шум процесу або збурення системи КВГ, як показано на рис. 6.9. Це дозволяє нам вивести оптимальний фільтр шуму процесу із використанням методу, що вивчався раніше, щоб створити систему компенсації температурної похибки, яка не потребує температурних вимірювань, але застосовує статистичні характеристики змін температури для мінімізації температурних похибок.

Використовуючи подібності у передатних функціях $W(s)$ і $W_\zeta(s)$, можна визначити збурення як

$$\psi(s) = \frac{2k}{g_2} \zeta_{12}(s). \quad (6.84)$$

Припускаючи, що КВГ встановлено на рухомому об'єкті, такому як безпілотний повітряний літальний апарат, наприклад, або наземний екіпаж, його спектральна густина потужності може бути представлена як низькочастотна модель, подібна до тої, що використовувалась раніше:

$$S_\Omega(s) = \frac{\sigma^2 B^2}{B^2 - s^2}. \quad (6.85)$$

Ясно, що зміни температури є повільними, а отже можуть адекватно представлятися наступною моделлю стохастичного дрейфу

$$S_{\zeta}(s) = \frac{\gamma^2 \sigma^2}{-s^2}. \quad (6.86)$$

Спектральні густини потужності (6.85) і (6.86) можна тепер застосувати для синтезу оптимального фільтра, який зменшує похибки, викликані змінами температури.

У термінах алгоритму Вінера для розрахунку оптимальних фільтрів шуму процесу, що вивчалось в розділі 6.3, спектральна густина $S_{\varphi\varphi}(s)$ може бути обчислена з (6.85), застосовуючи теорему Вінера-Хінчина наступним чином:

$$\begin{aligned} S_{\varphi\varphi}(s) &= |W_{\Omega}(s)|^2 S_{\psi}(s) \\ &= |W_{\Omega}(s)|^2 \frac{4k^4}{g_2^2} S_{\zeta}(s) \\ &= \frac{4\gamma^2 \sigma^2 k^4 \zeta^2}{-s^2 g_2^2 (-s^2 + k^2 \zeta^2)}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Спектральна густина (6.87) разом із спектральною густиною (6.85) може тепер бути використаною для виведення оптимальних фільтрів, базуючись на формулі (6.12). Після виконання всіх необхідних перетворень, оптимальний фільтр набуває наступної форми:

$$G(s) = \frac{2Bk\gamma(k\zeta + s)}{k\zeta(2Bk\gamma + s\sqrt{g_2^2 B^2 + 4k^2 \gamma^2})}. \quad (6.88)$$

Оптимальний фільтр температурних похибок (6.88) можна використати для зменшення впливу температурних варіацій на характеристики КВГ. Також важливо відмітити, що фільтр (6.88) є статичною передатною функцією, а отже не потребує обчислювальних приладів і може бути здійснений із використанням аналогової електроніки та застосуванням спеціальних інтегральних схем.

6.9 Висновки

В цьому розділі було синтезовано статичні фільтри як шумів вимірювання, так і стохастичних збурень, проведено їх числове моделювання, та оцінено якість їх роботи. Було також продемонстровано методологію синтезу дискретного фільтра Калмана для коріолісових вібраційних гіроскопів. Отримані результати було успішно застосовано для покращення вимірювання кутової швидкості серійного мікромеханічного датчика кутової швидкості. Було розроблено метод компенсації небажаних перехресних зв'язків у коріолісових вібраційних гіроскопах. На основі цих методів було розроблено просту систему часткової компенсації перехресних зв'язків для недорогих датчиків, та значно більш ефективну лінеаризовану систему повної компенсації для датчиків високої точності. Метод синтезу систем компенсації небажаних перехресних зв'язків для коріолісових вібраційних гіроскопів було успішно застосовано до синтезу двохкомпонентного датчика кутової швидкості на основі динамічно настроюваного гіроскопа (ДНГ), що полягає в послідовному синтезі контуру керування з вилученням перехресних зв'язків у двовимірній системі й обробленні сигналів для одержання необхідної якості датчика кутової швидкості. Показано, що вибором коефіцієнтів зворотного зв'язку можна регулювати вимірювальні характеристики приладу, а зміни параметрів ДНГ не істотно впливають на точність вимірювання кутової швидкості. Крім цього, на основі розроблених систем компенсації небажаних перехресних зв'язків у коріолісових вібраційних гіроскопах було розроблено системи компенсації температурних похибок цих гіроскопів для випадку наявності інформації про температуру. Для випадку, коли вимірювання температури не є можливим, було розроблено метод статистичної компенсації температурних похибок.

Таким чином, в цьому розділі було отримано наступні нові наукові і прикладні результати:

- передатні функції статичних фільтрів стохастичних шумів вимірювання;
- передатні функції статичних фільтрів стохастичних збурень;

- параметри дискретного фільтра Калмана для фільтрації стохастичних шумів вимірювання;
- метод синтезу систем компенсації небажаних перехресних зв'язків та перехресної чутливості коріолісових вібраційних гіроскопів;
- структура і передатні функції лінеаризованої системи часткової компенсації небажаних перехресних зв'язків коріолісових вібраційних гіроскопів в модульованих сигналах;
- структура і передатні функції нелінійної системи повної компенсації небажаних перехресних зв'язків;
- структура і передатні функції системи компенсації перехресної чутливості динамічно настроюваних гіроскопів;
- передатна функція температурної похибки вимірювання кутової швидкості;
- структура і передатна функція системи компенсації температурних похибок для температури, яка спостерігається;
- передатна функція оптимального фільтру температурних похибок у випадку стохастичної температури, яка не спостерігається.

РОЗДІЛ 7

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА КЕРУВАННЯ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ

Як було продемонстровано у попередньому розділі, ефективним методом покращення характеристик датчиків є використання обробки сигналів для зменшення похибок від шумів вимірювання та змін температури. Нажаль, через зміну з часом параметрів коріолісових вібраційних гіроскопів будь-яка заздалегідь спроектована система обробки сигналів стане в кінцевому підсумку незастосовною. Для того щоб побудувати систему обробки сигналів, яка здатна адаптуватися до будь-яких змін параметрів КВГ, ці параметри повинні неперервно ідентифікуватися під час роботи гіроскопа. В той час як до проблеми ідентифікації параметрів вібраційних гіроскопів в модульованій формі постійно звертаються дослідники в усьому світі, новий підхід, що базується на демодульованій динаміці КВГ розглядається в цьому підрозділі.

Крім цього, у додаток до систем обробки вихідних сигналів, вимірювальні характеристики коріолісових вібраційних гіроскопів можна значно покращити за допомогою замкнутих систем керування. Такі системи можуть не тільки підтримувати стабільність робочих параметрів та вимірювальних характеристик, але і реалізовувати різні режими роботи коріолісових вібраційних гіроскопів по вимірюванню кутової швидкості.

7.1 Моделі динаміки чутливих елементів у просторі станів

Для того, що ефективно проводити ідентифікацію параметрів гіроскопів та синтезувати систем керування та реалізації різних режимів роботи, розглянемо спочатку представлення динаміки чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів в просторі станів.

Нагадаємо, узагальнені рівняння руху чутливих елементів (2.29) коріолісових вібраційних гіроскопів різних конструкцій мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 = q_1 - g_1\Omega\dot{x}_2 - d_3\dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + (\omega_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 = q_2 + g_2\Omega\dot{x}_1 + d_4\dot{\Omega}x_1. \end{cases}$$

Тут x_1 та x_2 є узагальненими координатами, які описують первинний та вторинний рухи чутливих елементів, ω_1 та ω_2 є парціальними частотами відповідних рухів, а ζ_1 та ζ_2 відповідні безрозмірні коефіцієнти демпфування, Ω - це зовнішня переносна кутова швидкість і, на кінець, q_1 і q_2 - це узагальнені прискорення від зовнішніх сил, які діють на чутливі елементи. Вирази для інших параметрів цієї системи рівнянь для різних типів коріолісових вібраційних гіроскопів було наведено в таблиці 2.1.

Найбільш узагальнена форма представлення рівнянь руху у просторі часів має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X + B \cdot U, \\ Y = C \cdot X. \end{cases} \quad (7.1)$$

В рівняннях (7.1) складові матриці та вектори визначаються наступними виразами:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.2 \text{ а})$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (7.2 \text{ б})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 + d_1\Omega^2 & -2\zeta_1\omega_1 & -d_3\dot{\Omega} & -g_1\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_4\dot{\Omega} & g_2\Omega & -\omega_2^2 + d_2\Omega^2 & -2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix}, \quad (7.2 \text{ в})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.2 \text{ г})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.2 \text{ д})$$

Аналізуючи вираз (7.2 в) можна бачити, що у представленні у просторі станів (7.1) матриця A залежить від невідомої зовнішньої кутової швидкості Ω . Включення кутової швидкості до вектору станів X (7.2 а) зробить систему (7.1) нелінійною, що є небажаним. Більш того, стан, який спостерігається, має в своєму складі положення чутливого елементу, що змінюється із високою частотою. А це означає, що система ідентифікації та її алгоритми також повинні працювати із мінімальними затримками у часі, що значно підвищує вимоги та кошт апаратного забезпечення. Ця проблема може бути вирішена, якщо використовувати модель руху чутливих елементів у термінах демодульованих змінних.

Рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів в демодульованих змінних (4.8) були отримані в розділі 4 і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \ddot{A}_2 + 2(\zeta_2 \omega_2 + j\omega) \dot{A}_2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega \omega_2 \zeta_2) A_2 \\ & = (j\omega g_2 \Omega + d_4 \dot{\Omega}) A_1. \end{aligned}$$

де стала амплітуда первинних коливань (4.7) задано наступним виразом:

$$A_1 = \frac{q_{10}}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\omega_1 \zeta_1 \omega}.$$

Це рівняння можна записати із використанням змінних у просторі станів, де відсутні входи, які спостерігаються, але зовнішня кутова швидкість включена до вектору станів:

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X, \\ Y = C \cdot X. \end{cases} \quad (7.3)$$

Тут складові вектори та матриці задані наступними виразами:

$$X = \begin{bmatrix} A_2 \\ \dot{A}_2 \\ \Omega \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}, \quad (7.4 \text{ а})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_2^2 + \omega^2 - 2j\omega\omega_2\zeta_2 & -2(\zeta_2\omega_2 + j\omega) & j\omega g_2 A_1 & d_4 A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4 \text{ б})$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (7.4 \text{ в})$$

Необхідно зазначити, що хоча кутова швидкість включена до вектору станів (7.4 а), система (7.3) все ще залишається лінійною. Тут ми також прийняли, що кутове прискорення є дуже малим і може бути знехтуваним, що знайшло відображення в нулях останнього рядку матриці (7.4 б). Тим не менш, як вектор стану (7.4 а), так і системна матриця (7.4 б) мають своїми компонентами комплексні величини. Це може ускладнити реалізацію алгоритмів ідентифікації стандартними засобами розробки програмного забезпечення.

Використовуючи запропоновану у розділі 4 процедуру, ми можемо знехтувати старшою похідною комплексної амплітуди вторинних коливань, а саме прийняти, що

$$\ddot{A}_2 \approx 0,$$

і це дозволить нам спростити рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів до вигляду (4.12):

$$2(\zeta_2\omega_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_2\zeta_2)A_2 = (j\omega g_2\Omega + d_4\dot{\Omega})A_1.$$

В цьому разі вирази для змінних та коефіцієнтів системи рівнянь (7.3) набувають наступного вигляду:

$$X = \begin{bmatrix} A_2 \\ \Omega \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}, \quad (7.5 \text{ а})$$

$$A = \frac{1}{2(\zeta_2 \omega_2 + j\omega)} \begin{bmatrix} -\omega_2^2 + \omega^2 - 2j\omega\omega_2\zeta_2 & j\omega g_2 A_1 & d_4 A_1 \\ 0 & 0 & 2(\zeta_2 \omega_2 + j\omega) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.5 \text{ б})$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (7.5 \text{ в})$$

Знову кутові прискорення були знехтуваними, а вектор стану (7.5 а) все ще має у своєму складі комплексні змінні. Але порядок системи було знижено до третього. Нарешті, якщо зробити наступні припущення, а саме рівні парціальні частоти

$$\omega_1 = \omega_2 = k,$$

рівні коефіцієнти демпфування

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta,$$

збудження первинних коливань у резонансі

$$\omega = k\sqrt{1 - 2\zeta^2},$$

і постійну кутову швидкість

$$\dot{\Omega} \approx 0,$$

то тоді ми можемо отримати спрощені рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів відносно дійсної амплітуди вторинних коливань A_{20} у наступному вигляді:

$$\dot{A}_{20} = -k\zeta A_{20} + \frac{g_2 q_{10} \sqrt{1-2\zeta^2}}{4\zeta k^2 (1-\zeta^2)} \Omega. \quad (7.6)$$

Це спрощене рівняння (7.6) дозволяє нам отримати наступні параметри математичної моделі руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів у просторі станів (7.3):

$$X = \begin{bmatrix} A_{20} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad (7.7 \text{ а})$$

$$A = \begin{bmatrix} -k\zeta & \frac{g_2 q_{10} \sqrt{1-2\zeta^2}}{4\zeta k^2 (1-\zeta^2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.7 \text{ б})$$

$$C = [1 \quad 0]. \quad (7.7 \text{ в})$$

На цьому етапі ми маємо дійсні як вектор стану (7.7 а), так і матриці (7.7 б) та (7.7 в) в рівняннях (7.3). Останнє покращення до представлення системи можна досягнути, якщо прийняти до уваги, що коріолісові вібраційні гіроскопи вимірюють не амплітуду вторинних коливань чутливого елемента, а зовнішню кутову швидкість, яка є виходом датчика. Із урахуванням цього, рівняння (7.6) можна переписати як

$$\dot{\Omega}_* = -k\zeta \Omega_* + k\zeta \Omega. \quad (7.8)$$

В рівнянні (7.8) Ω_* є кутовою швидкістю, виміряною коріолісовим вібраційним гіроскопом, а Ω є дійсною кутовою швидкістю. Для рівняння (7.8) змінні та параметри моделі (7.3) набувають наступного вигляду:

$$X = \begin{bmatrix} \Omega_* \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad (7.9 \text{ а})$$

$$A = \begin{bmatrix} -k\zeta & k\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.9 \text{ б})$$

$$C = [1 \quad 0]. \quad (7.9 \text{ в})$$

Представимо тепер систему (7.3) в диференційній формі простору станів

$$\begin{cases} X_n = F \cdot X_{n-1} + w_{n-1}, \\ Y_n = H \cdot X_n + v_n. \end{cases} \quad (7.10)$$

Тут X_n є вибіркоvim вектором станів системи, Y_n є вимірним вектором стану, H є матрицею вимірювань стану, w_n та v_n є стохастичними збуреннями та шумами вимірювання відповідно (див. схему на рис. 7.1).

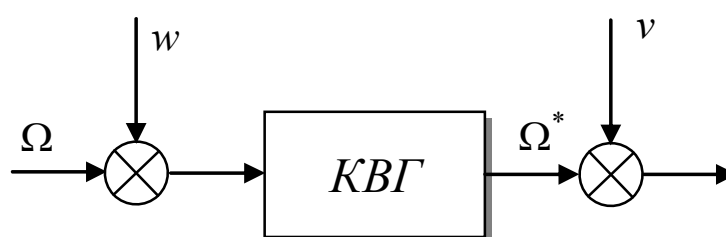


Рис. 7.1. Схема вимірювання кутової швидкості

Перехідна матриця стану F може бути обчислена із системної матриці A , використовуючи зворотне перетворення Лапласа L^{-1} , як

$$F = L^{-1} \{ (I \cdot s - A)^{-1} \}. \quad (7.11)$$

Враховуючи вирази (7.9), відповідні перехідна матриця стану та матриця вимірювань в системі (7.10) набувають такого виду:

$$F = \begin{bmatrix} e^{-k\zeta t} & 1 - e^{-k\zeta t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.12 \text{ а})$$

$$H = [1 \quad 0]. \quad (7.12 \text{ б})$$

Отримані тут математичні моделі чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів у дискретному просторі станів дозволяють синтезувати

та аналізувати алгоритми ідентифікації їх параметрів, та використовувати їх для покращення роботи систем обробки сигналів та систем керування.

7.2 Ідентифікація коріолісових вібраційних гіроскопів

Одним із найбільш широко використовуваних методів ідентифікації у реальному часі є алгоритми рекурентної ідентифікації. Саме тому вони розглядаються, як найбільш придатні методи розв'язання проблеми оцінювання параметрів динаміки чутливого елемента коріолісових вібраційних гіроскопів.

Математична модель чутливого елемента в алгоритмах ідентифікації

Тоді як представлення динаміки чутливого елемента коріолісових вібраційних гіроскопів у просторі станів (7.10) часто використовується в алгоритмах оцінювання стану, диференційне рівняння є більш зручним для використання в алгоритмах рекурентної ідентифікації, що можна легко записати, використовуючи складові перехідної матриці в (7.12 а):

$$\Omega_n^* = e^{-k\zeta t} \Omega_{n-1}^* + (1 - e^{-k\zeta t}) \Omega_{n-1} = -a \cdot \Omega_{n-1}^* + b \cdot \Omega_{n-1}. \quad (7.13)$$

В узагальненій формі рівняння (7.13) можна подати у наступній формі:

$$\begin{cases} \theta_n = \theta_{n-1}, \\ \Omega_n^* = \varphi^T \cdot \theta_n + e_n. \end{cases} \quad (7.14)$$

В системі рівнянь (7.14) вектор параметрів моделі, що будуть ідентифікуватися має вигляд:

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-k\zeta t} \\ 1 - e^{-k\zeta t} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

При цьому вектор затриманих вимірів входів та виходів системи визначається як

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} -\Omega_{n-1}^* \\ \Omega_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Система (7.14) разом з її складовими (7.15) і (7.16) дозволяє застосовувати класичні алгоритми рекурентної ідентифікації.

Схема ідентифікації параметрів математичної моделі

Аналізуючи форму представлення динаміки чутливого елемента коріолісових вібраційних гіроскопів (7.14) можна помітити, що вхідна кутова швидкість Ω , що присутня у векторі (7.16), є, вочевидь, невідомою. Однак, використовуючи, наприклад, фільтр Калмана, побудований на рівняннях (7.10) з параметрами (7.12), можна буде отримати оцінку вектора X , що містить як фільтрований вихід КВГ Ω^* так і оцінену вхідну кутову швидкість $\hat{\Omega}$, яка наближує невідому дійсну вхідну кутову швидкість Ω . Ці обидві кутові швидкості можуть бути використані для ідентифікації параметрів динаміки коріолісового вібраційного гіроскопа (7.15), як показано на рис. 7.2.

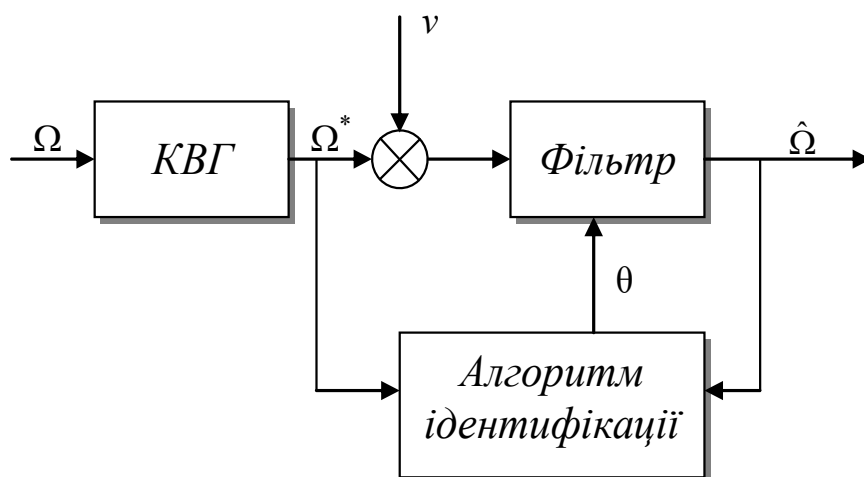


Рис. 7.2. Схема ідентифікації параметрів КВГ

З іншого боку, нефільтрований (зашумлений) вихід коріолісового вібраційного гіроскопа може також бути використаний в якості виміряного виходу Ω^* цієї системи. Після того, як вектор θ параметрів системи ідентифікований, він використовується для оновлення складових перехідної матриці F включеної в фільтр оцінювання кутової швидкості.

Тестування алгоритмів рекурсивної ідентифікації

Тепер протестуємо різні алгоритми рекурентної ідентифікації на оцінюванні параметрів КВГ. Для того щоб імітувати роботу коріолісового вібраційного гіроскопа разом із фільтрацією та ідентифікацією у відповідності до схеми на рис. 7.2, будемо використовувати реалістичну числову модель КВГ, реалізовану в середовищі Simulink/Matlab, як показано на рис. 7.3.

Кутова швидкість має форму прямокутних імпульсів з амплітудою 1 рад/с. Вторинні коливання подаються на блок "Демодулятор", на виході якого отримуємо сигнал, пропорційний до вхідної кутової швидкості. До демодульованого сигналу додаємо шум вимірювання і результат подаємо на вхід блоку "Фільтр Калмана". Всі ці сигнали показані на графіку на рис. 7.4.

В блоці "Фільтр Калмана" проходить оцінювання вектору стану гіроскопа (7.9 а), до складу якого входить невідома вхідна кутова швидкість. Ця швидкість виділяється та подається на вхід блоку, який реалізує різні алгоритми рекурентної ідентифікації в якості входу системи. Виходом системи є зашумлена кутова швидкість.

Якість алгоритмів рекурентної ідентифікації буде оцінюватись із використанням відносної похибки ідентифікації параметрів, вираженої у відсотках таким чином

$$E = \frac{a - e^{-k\zeta t}}{e^{-k\zeta t}} \cdot 100\%. \quad (7.17)$$

Тут a є полюсом системи, ідентифікованим за допомогою алгоритму рекурентної ідентифікації, t є шагом вибірки у часі при числовому моделюванні.

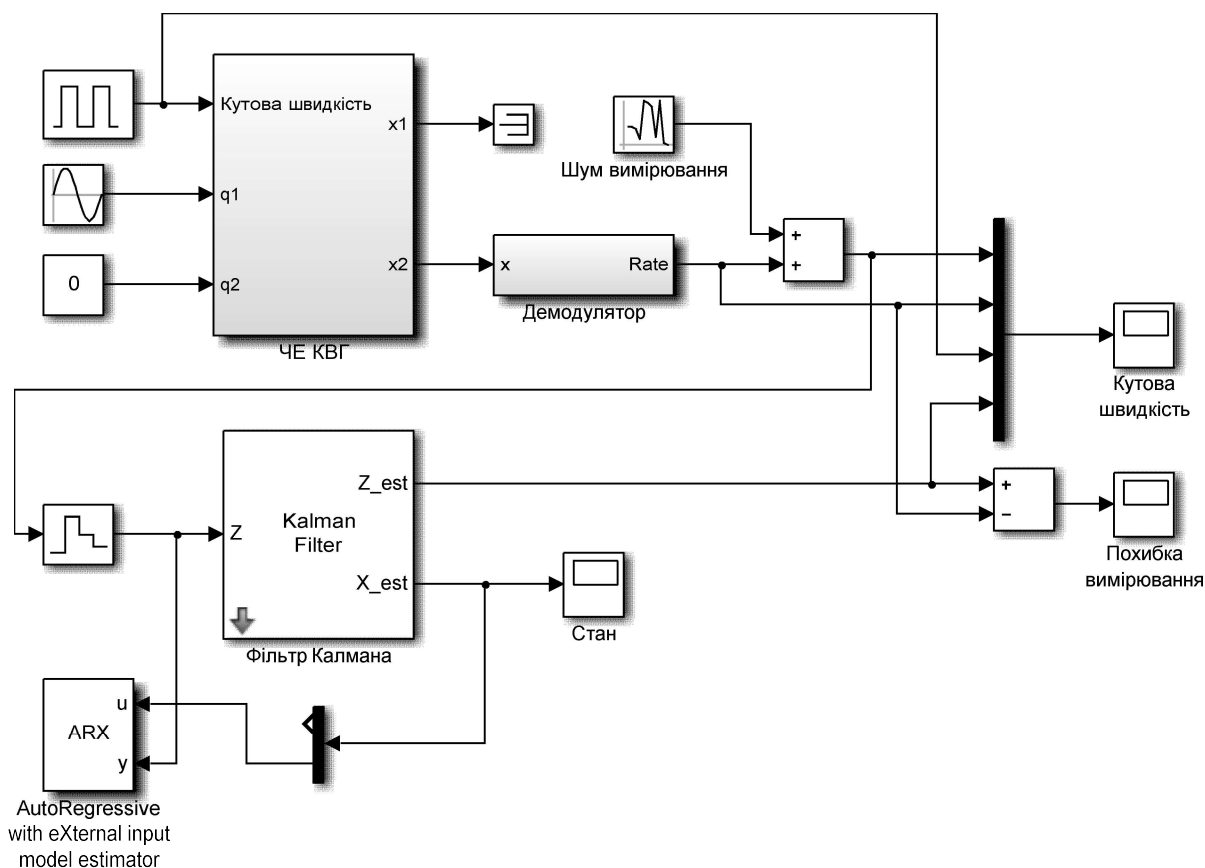


Рис. 7.3. Схема числового тестування алгоритмів ідентифікації

Всі алгоритми тестуються за трьох наступних умов: ідеальної – дійсна кутова швидкість в якості входу та чистий вихід гіроскопа, реальний – оцінений вхід та фільтрований вихід, та зашумлений – оцінений вхід та зашумлений вихід. Останній використовується для оцінки чутливості алгоритму до помилок оцінювання. Оцінюються наступні алгоритми рекурентної ідентифікації: авто-регресивний із зовнішнім входом (ARX), авто-регресивний із ковзним середнім та зовнішнім входом (ARMAX), та алгоритм Бокса-Дженкінса (BJ).

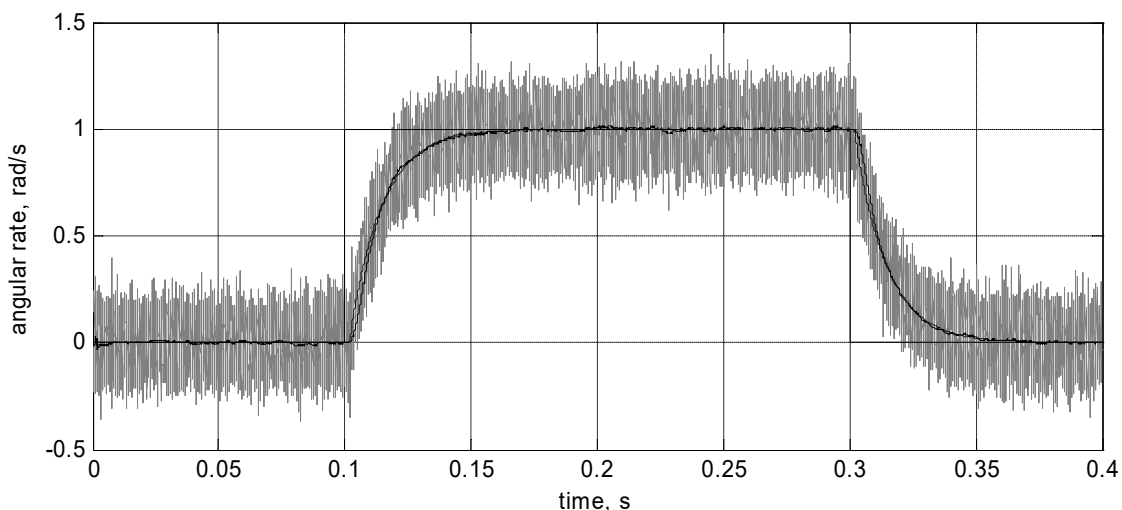


Рис. 7.4. Сигнали кутової швидкості

(сірий – зашумлений вихід, крапками – дійсний вихід без шуму, суцільна – оцінка виходу)

Результати тестування алгоритмів ідентифікації

Отримані вихідні сигнали по результатах тестування показані на рис. 7.5 - 7.7. Характеристики алгоритмів, оцінені із використанням (7.17), надані в таблиці 7.1.

Таблиця 7. 1. Характеристики алгоритмів рекурентної ідентифікації

Алгоритм	Ідеальний	Реальний	З шумом
ARX	- 0.0175	-0.0285	-46.4500
ARMAX	0.0185	-0.0295	-0.0175
Бокс-Дженкінс (BJ)	-0.0355	0.0095	-0.0405

Вивчаючи подані в таблиці 7.1 характеристики алгоритмів рекурентної ідентифікації, можна побачити, що у випадку великого рівня шумів вимірювання кутової швидкості алгоритм ARMAX дає найкращі результати,

тоді як у випадку малих шумів може з успіхом застосовуватись алгоритм Бокса-Дженкінса.

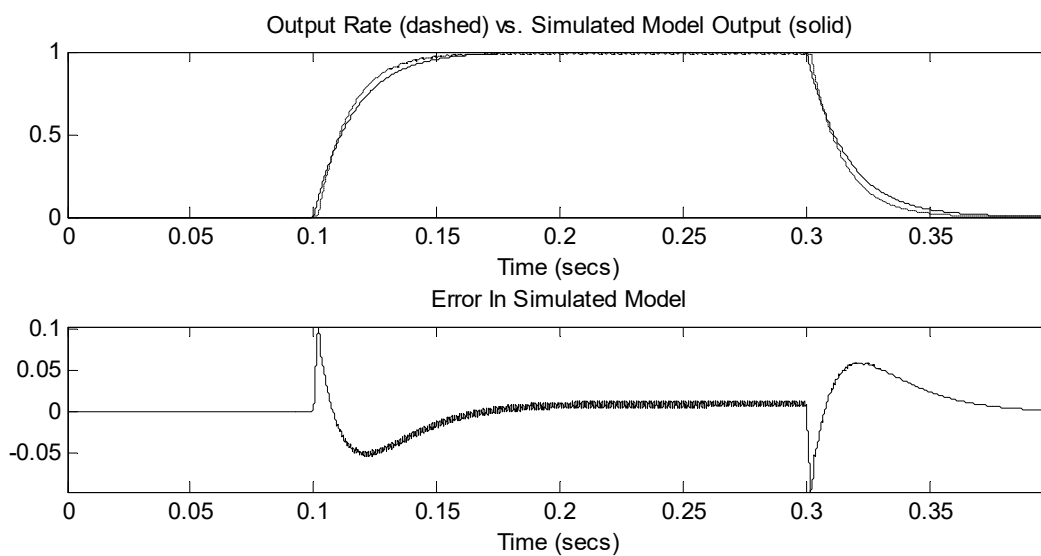


Рис. 7.5. ARX за ідеальних умов

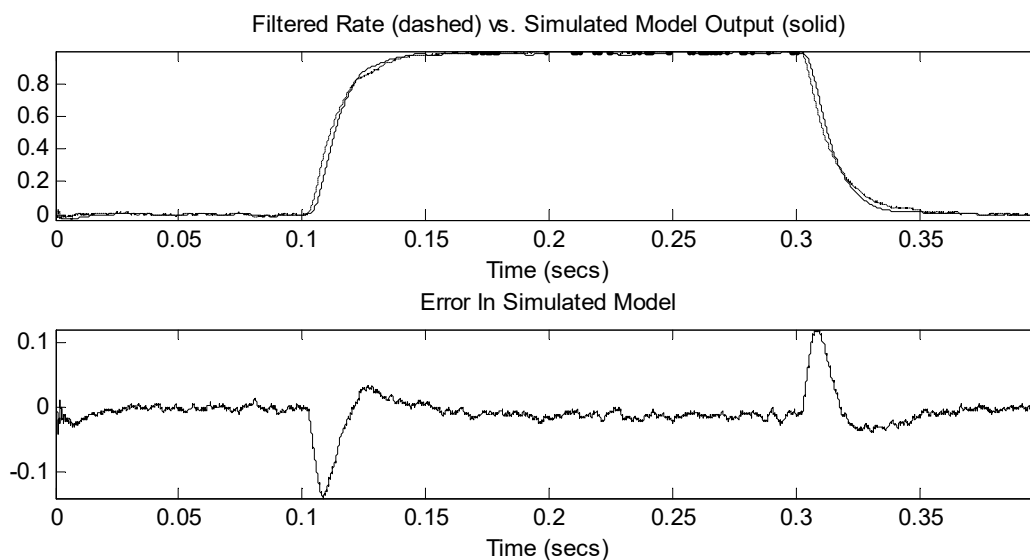


Рис. 7.6. ARX за реальних умов

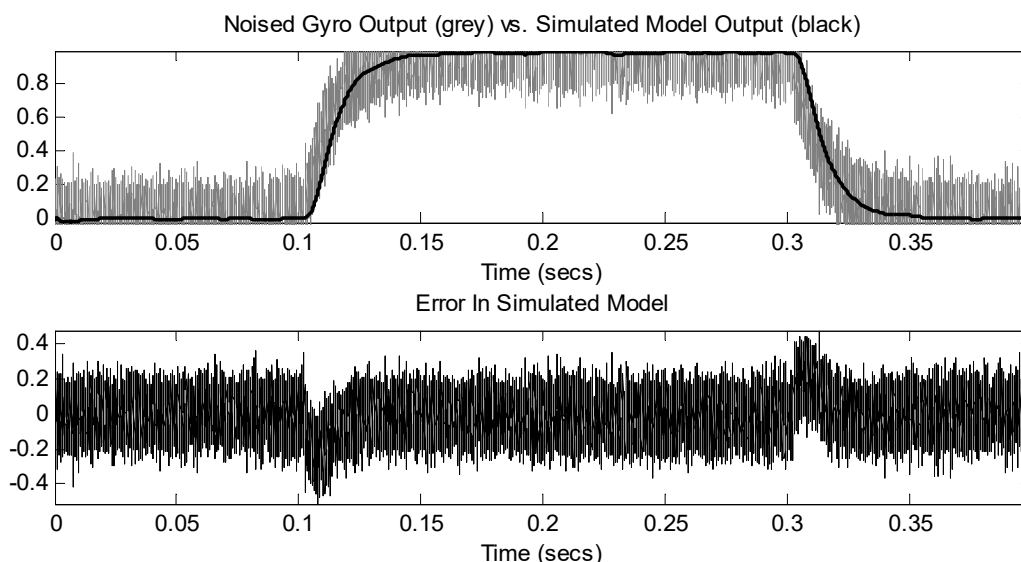


Рис. 7.7. ARMAX за умов шуму

В той же час всі алгоритми продемонстрували достатньо придатні характеристики в запропонованих у цій роботі рамках ідентифікації. Враховуючи, що в ідентифікації використовується оцінювана вхідна кутова швидкість, і ідентифіковані параметри далі застосовуються для отримання кращої оцінки цієї вхідної швидкості, загальна збіжність такої системи повинна вивчатися більш детально.

7.3 Керування в режимі інтегруючого гіроскопа

Необхідність вимірювати кут обертання замість кутової швидкості, або режим інтегруючого гіроскопа, призводить до особливим чином сконструйованих чутливих елементів, які поведуть себе подібно до маятника Фуко. Тут ми розглянемо інший підхід, коли звичайний КВГ, що вимірює кутову швидкість, доповнюється регулятором зворотного зв'язку, який забезпечує подібну до інтегруючого гіроскопа роботу, в той же час утримуючи вихідні вторинні коливання чутливого елемента.

У термінах демодульованих сигналів, КВГ разом із від'ємним контуром зворотного зв'язку може бути представленим у вигляді системи керування, показаної на рис. 7.8.

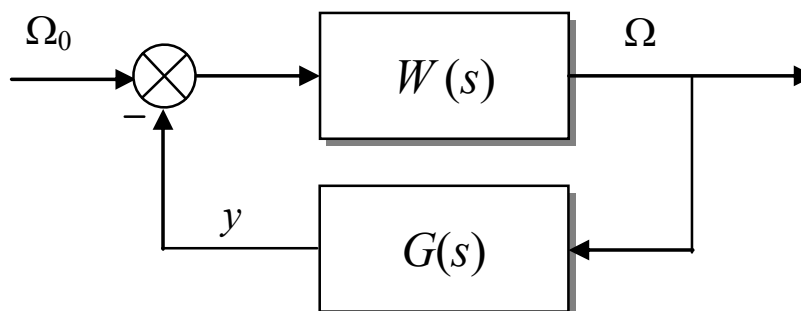


Рис. 7.8. КВГ з регулятором зворотного зв'язку

Тут Ω - дійсний вихід гіроскопа (виміряна кутова швидкість), Ω_0 - невідома кутова швидкість (вхід системи), а $W(s)$ є передатною функцією КВГ, заданою (6.1):

$$W(s) = \frac{k\zeta}{s + k\zeta}. \quad (7.18)$$

Метою є конструювання такого регулятора зворотного зв'язку $G(s)$, продукуючого вихід y , який, будучи модульованим і застосованим у вторинному контурі чутливого елемента КВГ, буде обмежувати дійсний вихід гіроскопа. В той же час, сигнал y сам по собі повинен представляти інтегровану кутову швидкість, тобто кут обертання.

Передатна функція від вхідної кутової швидкості Ω_0 до виходу зворотного зв'язку y є такою:

$$W_y(s) = \frac{W(s) \cdot G(s)}{1 + W(s) \cdot G(s)}. \quad (7.19)$$

Для того, щоб виконати поставлену задачу вимірювання інтегрованої кутової швидкості («цілокутовий» режим), передатна функція (7.19) повинна дорівнювати простому інтегратору

$$W_y(s) = \frac{1}{s}, \quad (7.20)$$

що призводить до наступного рівняння:

$$\frac{W(s) \cdot G(s)}{1 + W(s) \cdot G(s)} = \frac{1}{s}. \quad (7.21)$$

Підстановка (7.18) в рівняння (7.21) і розв'язування цього рівняння відносно невідомої передатної функції зворотного зв'язку $G(s)$ дає

$$G(s) = \frac{\zeta k + s}{\zeta k(s - 1)}. \quad (7.22)$$

Важливо пам'ятати, що передатна функція (7.22) виведена в термінах демодульованих оригінальних сигналів. Це означає, що для того, щоб прикласти її вихід в якості збудження до вторинної коливальної ланки чутливого елемента (прискорення q_2), він повинен бути модульованим з диференційованим виходом первинних коливань, щоб зробити його ідентичним до коріолісової сили, "діючої" вздовж координати вторинного руху:

$$q_2(t) = g_2 \cdot y(t) \cdot \dot{x}_1(t). \quad (7.23)$$

Прикладання сигналу (7.23) до чутливого елемента по напрямку вторинного руху призводить до зменшення його переміщень, в той час як вихід у зворотного зв'язку стає новим виходом гіроскопа, який реалізує бажаний режим роботи.

Схема моделювання КВГ з регулятором зворотного зв'язку показана на рис. 7.9.

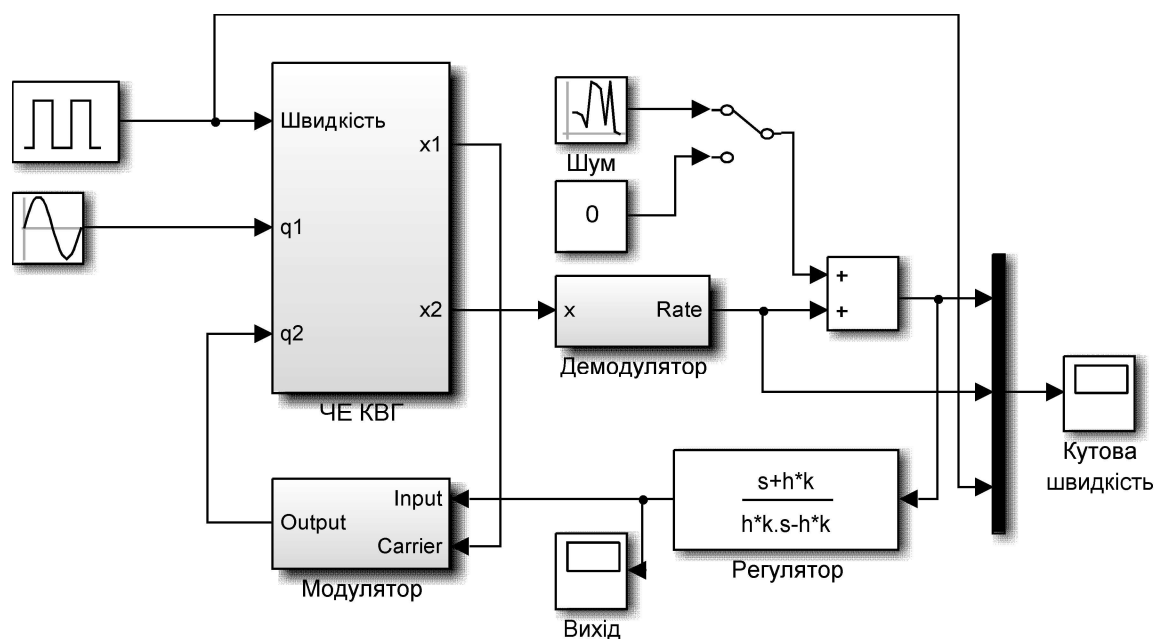


Рис. 7.9. Моделювання керованої роботи КВГ в Simulink

Тут підсистема «Динаміка КВГ» моделює динаміку чутливого елемента, базуючись на повних узагальнених рівняннях. Рис. 7.10 демонструє демодульовані сигнали, отримані за допомогою числового моделювання: вхідна кутова швидкість (пунктиром), дуже зашумлена виміряна кутова швидкість (сірим), і компенсований дійсний вихід КВГ.

Можна відмітити, що дійсний вихід гіроскопа (суцільна лінія) насправді менший за вхідну кутову швидкість. В той же час, вихід регулятора зворотного зв'язку (показаний на рис. 7.11) видає інтегровану кутову швидкість (кут повороту), в той же час зменшуючи ефект від шуму в контурі зворотного зв'язку.

Представлений тут синтез регулятора зворотного зв'язку має результатом систему, прикладання якої до звичайного КВГ дозволяє реалізувати режим інтегруючого гіроскопа для звичайного КВГ.

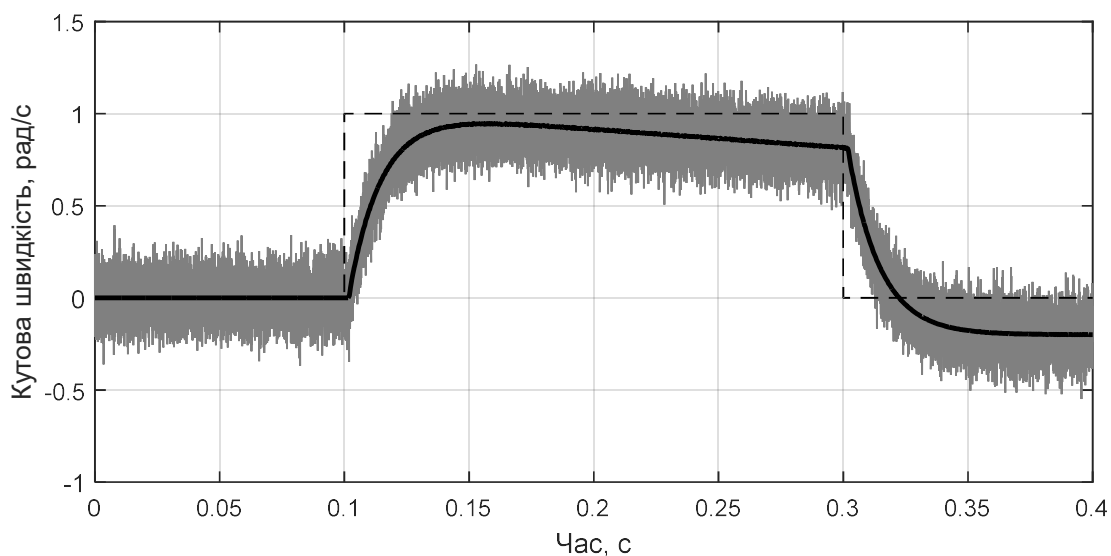


Рис. 7.10. Сигнали КВГ: суцільна – вторинний вихід в режимі компенсації, сіра – зашумлений вторинний вихід, пунктиром – вхідна кутова швидкість

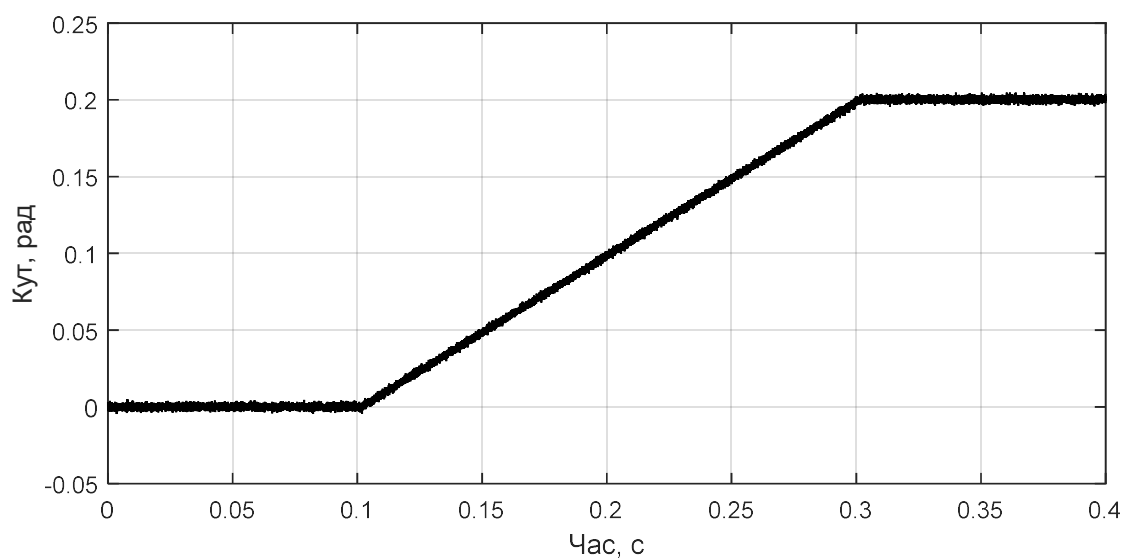


Рис. 7.11. Інтегрований вихід зворотного зв'язку КВГ

Отриманий регулятор зменшує відхилення чутливого елемента, а також вплив шуму вимірювань на вихідний кут повороту.

7.4 Керування в компенсаційному режимі

Оскільки амплітуда вторинних коливань в коріолісових вібраційних гіроскопах прямо пропорційна до вимірюваної кутової швидкості, то конструктивні обмеження на великі відхилення чутливого елемента у напрямку вторинного руху призводять до обмеження діапазону вимірюваних швидкостей. Для того, щоб збільшити діапазон кутових швидкостей, які можна вимірювати коріолісовим вібраційним гіроскопом, зазвичай використовується компенсаційний режим роботи, при якому за допомогою зворотного зв'язку створюється сила (або момент), які зменшують вторинні коливання. При цьому в якості вихідного сигналу використовується сигнал в цьому контурі зворотного зв'язку.

Як було показано у попередньому підрозділі, завжди можна сформулювати вимоги як до результуючої передатної функції виходу чутливого елемента, так і до виходу в контурі зворотного зв'язку. Нехай передатна функція виходу в контурі зворотного зв'язку буде дорівнювати аперіодичній ланці

$$W_y(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad (7.24)$$

де λ є цільовою частотою компенсаційного датчика кутової швидкості на основі коріолісового вібраційного гіроскопа. Вона відноситься до сталої часу перехідного процесу як

$$T = \frac{1}{\lambda}. \quad (7.25)$$

Знову, щоб знайти передатну функцію регулятора в контурі зворотного зв'язку, прирівняємо передатну функцію (7.19) до бажаної (7.24):

$$\frac{W(s) \cdot G(s)}{1 + W(s) \cdot G(s)} = \frac{\lambda}{s + \lambda}. \quad (7.26)$$

Підстановка (7.18) в рівняння (7.26) і розв'язування цього рівняння відносно невідомої передатної функції зворотного зв'язку $G(s)$ дає

$$G(s) = \lambda \frac{\zeta k + s}{\zeta k s} = \frac{1}{T} \frac{\zeta k + s}{\zeta k s}. \quad (7.27)$$

Після підстановки виразу (7.27) для регулятора зворотного зв'язку до виразу передатної функції еквівалентної незамкненої системи, отримуємо наступну результуючу передатну функцію:

$$W_0(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s) \cdot G(s)} = \frac{sk\zeta}{(s + \lambda)(s + k\zeta)}. \quad (7.28)$$

Аналізуючи (7.28) неважко бачити, що у сталому режимі, вихід системи дорівнює нулю, тобто

$$W_0(s \rightarrow 0) = 0. \quad (7.29)$$

Це означає, що при постійній кутовій швидкості в усталеному режимі вторинні коливання будуть відсутні. При цьому передатна функція по виходу з контуру зворотного зв'язку буде передатною функцією ідеального вимірювача кутової швидкості

$$W_y(s \rightarrow 0) = 1 \quad (7.30)$$

Перевіримо ефективність роботи коріолісового вібраційного гіроскопа в режимі компенсаційного датчика кутової швидкості за допомогою реалістичного числового моделювання. Схему числового моделювання показано на рис. 7.12. На цій схемі вихід регулятора зворотного зв'язку модулюється диференційованими первинними коливаннями і подається на вхід вторинних коливань. Передатна функція регулятора відповідає до (7.27).

Результуючий вихід по вторинним коливанням за відсутності шумів вимірювання показаний на рис. 7.13, а вихід з контуру зворотного зв'язку на рис. 7.14.

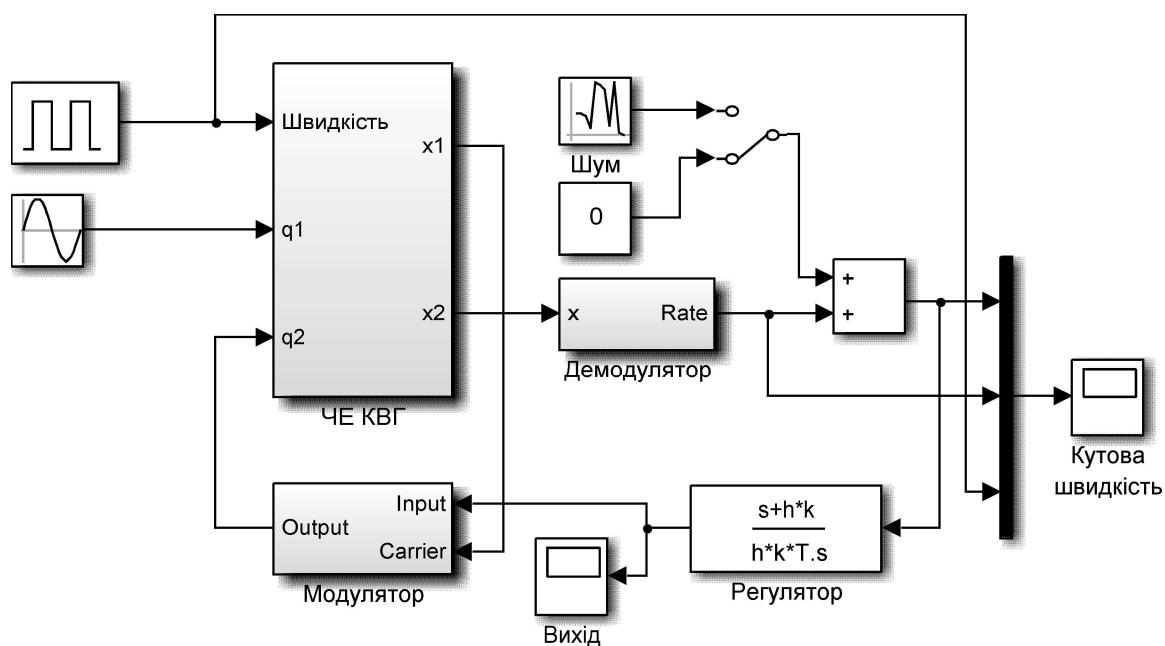


Рис. 7.12. Моделювання роботи компенсаційного КВГ

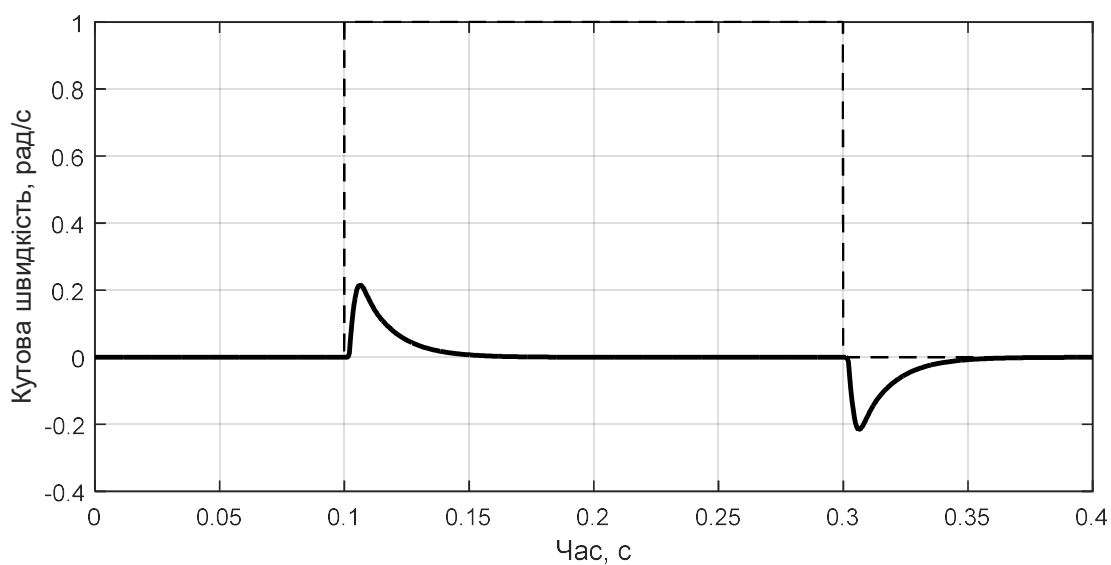


Рис. 7.13. Сигнали КВГ: суцільна – вторинний вихід в режимі компенсації, пунктиром – вхідна кутова швидкість

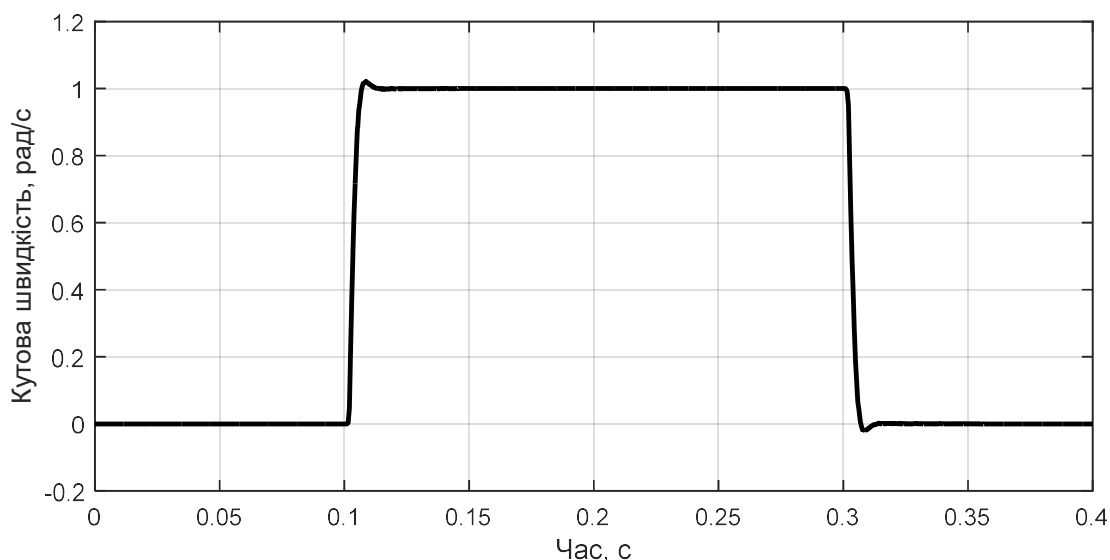


Рис. 7.14. Результуючий вихід з контуру зворотного зв'язку

Аналізуючи графіки на рис. 7.13 і 7.14 неважко бачити, що використання зворотного зв'язку із регулятором (7.27) не тільки зменшило вторинний рух чутливого елемента, але і значно покращило вимірювальні характеристики з точки зору якості перехідного процесу.

Результати числового моделювання при наявності шумів вимірювання показано на відповідних графіках на рис. 7.15 та 7.16.

Аналізуючи вихід компенсаційного коріолісового вібраційного гіроскопа при наявності шумів вимірювання неважко бачити, що шуми не зменшилися, як у випадку з режимом інтегруючого гіроскопа, але навіть підсилюються. Такий небажаний ефект значно обмежує застосування запропонованого алгоритму компенсації вторинних коливань. Одним із очевидних способів запобігання такого результату буде використання оптимальних статичних фільтрів шумів вимірювання, синтезованих в розділі 6, які можна розмістити в контурі зворотного зв'язку перед регулятором. Але в цьому випадку якість результуючого перехідного процесу треба оптимізувати із урахуванням роботи фільтру шумів вимірювання.

Іншим способом подолання цієї проблеми буде синтез оптимального стохастичного регулятора за допомогою метода Вінера-Колмогорова.

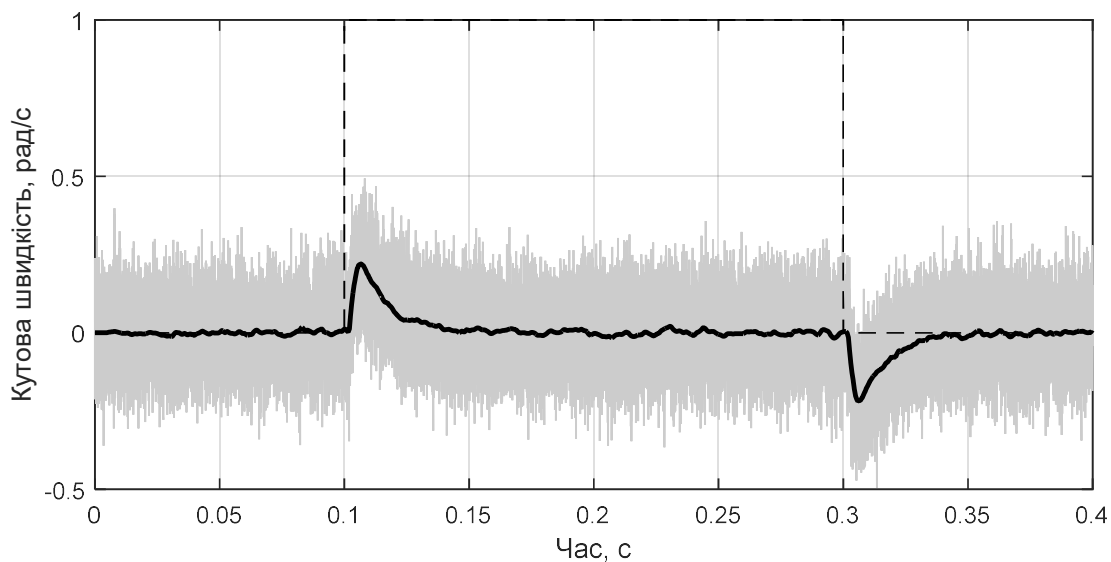


Рис. 7.15. Сигнали КВГ: суцільна – вторинний вихід в режимі компенсації, сіра – зашумлений вторинний вихід, пунктиром – вхідна кутова швидкість

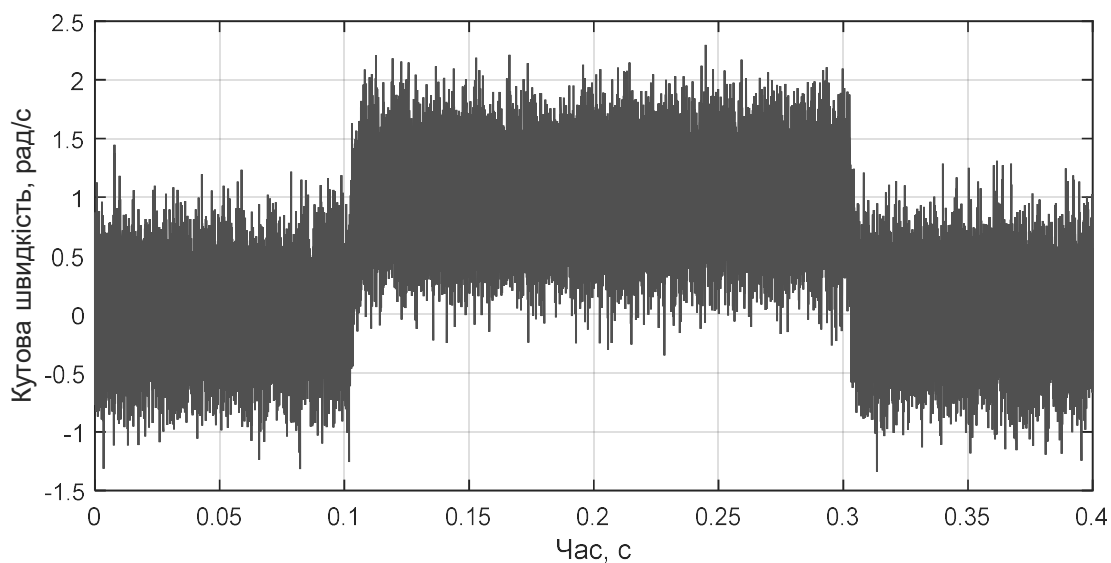


Рис. 7.16. Вихідна кутова швидкість з контуру компенсації при наявності шумів вимірювання

7.5 Висновки

В результаті аналізу динаміки чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів в термінах демодульованих сингалів у просторі станів було отримано рівняння для рекурсивної ідентифікації параметрів їх динаміки, а також запропоновано схему ідентифікації параметрів динаміки чутливого елемента з використанням оптимального оцінювання вхідних кутових швидкостей. Було проаналізовано та порівняно ефективність роботи різних рекурсивних алгоритмів ідентифікації у реальному часі за ідеальних, реалістичних та зашумлених умов. Найбільш ефективні алгоритми ідентифікації було визначено та оцінена точність їх роботи.

На основі отриманої раніше спрощеної передатної функції коріолісового вібраційного гіроскопа було синтезовано замкнені системи керування, які реалізують наступні режими роботи: режим компенсаційного вимірювача кутової швидкості, режим компенсаційного інтегруючого гіроскопа. Висока ефективність роботи запропонованих систем керування було перевірено за допомогою реалістичного числового моделювання.

Таким чином, в цьому розділі були отримані наступні нові наукові і прикладні результати:

- узагальнена математична модель динаміки чутливого елемента коріолісового вібраційного гіроскопа в просторі станів;
- структура рекурсивної ідентифікації параметрів динаміки чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів;
- структура і передатна функція системи керування коріолісовим вібраційним гіроскопом в режимі інтегруючого гіроскопа;
- структура і передатна функція системи керування в режимі компенсаційного датчика кутової швидкості.

ВИСНОВКИ

Таким чином, виконані в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати наступні нові наукові та практичні результати:

В науковому плані

- дістали подальший розвиток та були узагальнені до єдиної системи рівняння руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів з поступальними, обертальними та хвильовими первинними та вторинними рухами;
- отримано вирази для розрахунку амплітуд, фаз і власних частот первинного і вторинного руху в залежності від зовнішньої кутової швидкості і параметрів чутливого елемента на основі повних узагальнених рівнянь руху;
- запропоновано точні та наближені вирази для розрахунку напіввісей та кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента на основі, що обертається, в залежності від конструктивних параметрів чутливих елементів, а також вирази для точної та наближеної передатних функцій кута повороту фазової траєкторії руху чутливого елемента;
- отримано узагальнену комплексну та спрощену дійсну передатні функції коріолісових вібраційних гіроскопів від кутової швидкості до амплітуди вторинних коливань; вирази для розрахунку амплітудно та фазо-частотних характеристик для гармонічної кутової швидкості;
- вирази для розрахунку сил, які діють на чутливий елемент і створюються за допомогою електростатичного гребінчастого двигуна із врахуванням нелінійної ємності; залежність парціальної частоти чутливого елемента від частоти збудження;
- вирази для розрахунку масштабного коефіцієнта та мінімальної робочої частоти коріолісових вібраційних гіроскопів та модель похибки від його нелінійності;

- вираз для розрахунку роздільної здатності для ємнісної системи реєстрації вторинних коливань та відповідного динамічного діапазону коріолісового вібраційного гіроскопа;
- вирази для зсуву нуля від зовнішніх вібрацій та неспівпадіння пружних та вимірювальних вісей та методика мінімізації цих похибок;
- вирази для розрахунку амплітудної та фазової динамічних похибок, смуги пропускання, та метод вибору відношення парціальних частот та коефіцієнтів демпфування для її забезпечення;
- передатні функції статичних фільтрів шумів вимірювання та стохастичних збурень;
- структура і передатні функції лінеаризованої системи часткової компенсації небажаних перехресних зв'язків коріолісових вібраційних гіроскопів в модульованих сигналах; структура і передатні функції нелінійної системи повної компенсації небажаних перехресних зв'язків;
- структура і передатна функція системи компенсації температурних похибок для температури, яка спостерігається, а також передатна функція оптимального фільтру температурних похибок у випадку стохастичної температури, яка не спостерігається.
- передатні функція системи керування коріолісовим вібраційним гіроскопом в режимі інтегруючого гіроскопа та в режимі компенсаційного датчика кутової швидкості.

В прикладному плані

- розроблено методи розрахунку парціальних частот первинних і вторинних коливань чутливого елемента, їх відношення та коефіцієнтів демпфування з точки зору забезпечення необхідного діапазону лінійного вимірювання кутової швидкості, динамічного діапазону, смуги пропускання;
- обґрунтовано режими оптимального збудження первинних коливань чутливого елемента за допомогою електростатичного гребінчастого двигуна;

- розроблено схеми числового моделювання роботи коріолісових вібраційних гіроскопів на основі повної узагальненої математичної моделі в програмному середовищі Сімулінк/Матлаб;
- розроблено алгоритми та створено програмне забезпечення для ефективного проектування чутливих елементів мікромеханічних коріолісових вібраційних гіроскопів, що значно зменшують час на їх розробку;
- розроблено структуру системи рекурсивної ідентифікації параметрів динаміки чутливого елемента та досліджено ефективність роботи різних алгоритмів;
- розроблено системи оптимальної фільтрації шумів вимірювання та стохастичних збурень;
- розроблено низькорівневі системи повної та часткової компенсації небажаних перехресних зв'язків та перехресної чутливості коріолісових вібраційних гіроскопів;
- розроблено системи компенсації та фільтрації температурних похибок вимірювання кутової швидкості;
- розроблено системи керування рухом чутливого елемента, які реалізують режими компенсаційного датчика кутової швидкості та інтегруючого гіроскопа;

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Крылов А.Н., Крутков Ю.А. Общая теория гироскопов. – Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – 394 с.
- [2] Savet P. Gyroscopes: Theory and Design. – McGraw-Hill, New York, 1961. – 402 p.
- [3] Ривкин С.С. Теория гироскопических устройств: в 2 ч. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 1056 с.
- [4] Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 482 с.
- [5] Quick W. Theory of Vibrating String as an Angular Motion Sensor // Journal of Applied Mechanics. – 1964. – P. 523-534.
- [6] Данилин В.П. Гироскопические приборы. – М.: Высшая школа, 1965. – 540 с.
- [7] Одинцов А.А. Гироскопические интеграторы линейных ускорений. – К.: КПИ, 1968. – 88 с.
- [8] Одинцов А.А. Компенсационные гиротаксометры. – К.: КПИ, 1969. – 118с.
- [9] Малеев П.И. Новые типы гироскопов. – Л.: Судостроение, 1971. – 160 с.
- [10] Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. – М.: Машиностроение, 1970. – 216 с.
- [11] Ривкин С.С. Статистический синтез гироскопических устройств. – Л.: Судостроение, 1970. – 422 с.
- [12] Пельпор Д.С. Гироскопические системы. – М.: Высш. шк., 1971. – Ч. 1. 568 с.
- [13] Ригли У., Холлистер У., Денхард У. Теория, проектирование и испытания гироскопов. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
- [14] Кошляков В.Н. Теория гироскопических компасов. – М.: Наука, 1972. – 344 с.

- [15] Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. – В кн.: История механики гироскопических систем. М.: Наука, 1975. – С. 43-60.
- [16] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 672 с.
- [17] Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. – Изд. 3-е. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 400 с.
- [18] Климов Д.М., Харламов С.А. Гироскоп в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
- [19] Friedland B., Hutton M. F. Theory and error analysis of vibrating member gyroscope // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1978. – №23. – P. 545-556.
- [20] Збруцкий А.В. Влияние поступательной вибрации на динамически настраиваемый гироскоп. – Изв. вузов. Приборостроение, 1980. – № 10. – С. 13-16.
- [21] Збруцкий А.В. К вопросу о динамической устойчивости гироскопических систем. – Докл. АН СССР, 1981. – № 3. – С. 43-47.
- [22] U.S. Patent 4381672. Vibrating beam rotation sensor / O'Connor J., Shupe D. – 1983.
- [23] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – № 5. – С. 17-23.
- [24] Павловский М.А., Збруцкий А.В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. – К.: Вища школа, 1984. – 192 с.
- [25] Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
- [26] Ragan R. Inertial Technology for the Future // IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems. – V-AES20 (4) . – 1984. – P. 414-440.
- [27] Пат. 4598585 США. Planar inertial sensor / Voxenhorn B. (США); The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge; Заявл. 19.03.1984; Оpubл. 8.07.1986.
- [28] Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

- [29] Одинцов А.А. Теория и расчет гироскопических приборов. – К.: Выща школа, 1985. – 392 с.
- [30] Бойчук О.Ф., Збруцкий А.В., Павловский М.А. Уравнения движения многоколенных динамически настраиваемых гироскопов // Механика гироскопических систем. – 1985. – Вып. № 4. – С. 3-11.
- [31] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.:Наука, 1985. – 126 с.
- [32] Павловский М.А. Теория гироскопов. – К.: Вища школа, 1986. – 304 с.
- [33] Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д. Динамически настраиваемые гироскопы (теория и конструкция) . – М.: "Машиностроение", 1988. – 304 с.
- [34] Voxenhorst B., Greiff P. A Vibratory Micromechanical Gyroscope // Proceedings of AIAA Guidance and Control Conference, Minneapolis, USA. – 1988. – P. 1033-1040.
- [35] Spangler L., Wise K.D. A New Silicon-on-Glass Process for Integrated Sensors // IEEE Sensors and Actuator Workshop Tech. Digest. – Hilton Head, S.C. – 1988. – P. 140-142.
- [36] Tang W., Nguyen T.-C., Howe R. Laterally driven polysilicon resonant microstructures // Proceedings Micro Electro Mechanical Systems, An Investigation of Micro Structures, Sensors, Actuators, Machines and Robots. IEEE. – 1989. – P. 53–59.
- [37] Fujimura S., Yano K., Kumasaka T., Ariyoshi H., Ono O. Vibration Gyros and their Applications // Proc. IEEE International Conference on Consumer Electronics. – 1989. – P. 116-117.
- [38] Buser R., De Rooij N. Tuning Forks in Silicon // IEEE Micro-Electro-Mechanical Systems Workshop, Salt Lake City, USA. – 1989. – P. 94-95.
- [39] Söderkvist J. A Mathematical Analysis of Flexural Vibrations of Piezoelectric Beams With Applications to Angular Rate Sensors: Ph.D. Thesis. – Uppsala University, Sweden. – 1990.

- [40] Tang W.C. Electrostatic comb drive for resonant sensor and actuator application // Ph.D. dissertation. – Univ. of California, Berkeley, CA. – 1990.
- [41] Greiff P., Boxenhorn B., King T., Niles L. Silicon Monolithic Gyroscope // Transducers '91, Digest of Technical Papers, International Conference on Solid State Sensors and Actuators, USA. – 1991. – P. 966-969.
- [42] Soderkvist J. Piezoelectric beams and vibrating angular rate sensors // Ultrasonics, IEEE Transactions on Ferroelectrics and Frequency Control. – 1991. – 38(3) . – P. 271-280.
- [43] Fujishima S., Nakamura T., Fujimoto K. Piezoelectric Vibratory Gyroscope Using Flexural Vibration of a Triangular Bar // Proceedings of the 45th Annual Symposium on Frequency Control. – 1991. – P. 261-265.
- [44] Abe H., Yoshida T., Turuga K. Piezoelectric ceramic cylinder vibratory gyroscope. Japanese Journal of Applied Physics. – 1992. – 31, part 1, No. 9B. – P. 3061-3063.
- [45] Lawrence A. Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance & Control. – Springer-Verlag, New York. – 1993. – 278 p.
- [46] Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Коржевин Д.А. Собственные колебания микромеханического вибрационного гироскопа // Респ. междувед. Научно-техн. Сб. “Механика гироскопических систем”. – Киев. – 1993. – Вып. 12. – С. 86-92.
- [47] Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Шахов С.А. Частотные характеристики динамически симметричного микромеханического вибрационного гироскопа // Респ. междувед. научно-техн. сб. “Механика гироскопических систем”. – Киев. – 1993. – Вып. 12. – С. 93-99.
- [48] Bernstein J., Cho S., King A., Kourepenis A., Maciel P., Weinberg M. A micromachined comb-drive tuning fork rate gyroscope // Micro Electro Mechanical Systems, MEMS '93, Proceedings An Investigation of Micro Structures, Sensors, Actuators, Machines and Systems, IEEE. – 1993. – P. 143-148.

- [49] U.S. Patent 5349855. Comb drive micromechanical tuning fork gyro / Bernstein I., Weinberg M. – 27 Sept 1994.
- [50] Barbour N., Elwell I., Setterlund R., Schmidt G. Inertial instruments: where to now? // 1 St. Petersburg international conference on gyroscopic technology. – St. Petersburg. – 1994. – P. 13-24.
- [51] Burdess J., Harris A., Cruickshank J., Wood D., Cooper G. A Review of Vibratory Gyroscopes // Journal of Engineering Science and Education. – 1994. – V3(6) . – P. 249-254.
- [52] Söderkvist J. Micromachined gyroscopes // Sensors and Actuators A: Physical. – 1994. – 43(1-3). – P. 65-71.
- [53] Putty M., Najafi K. A Micromachined Vibrating Ring Gyroscope // Solid State Sensor & Actuator Workshop, Hilton Head. – 1994. – P. 213-220.
- [54] Lynch D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging // Proc. 2nd St. Petersburg Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation, St. Petersburg. – 1995. – P. 26-34.
- [55] Weinberg M., Bernstein I., Cho S., King A., Kourepenis A., Ward P., Sohn I. A Micromachined comb drive tuning fork gyroscope for commercial applications // 2-nd St. Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation. – St. Petersburg. – 1995. – P. 79-87.
- [56] Tanaka K., Mochida Y., Sugimoto M., Moriya K., Hasegawa T., Atsuchi K., Ohwada K. A micromachined vibrating gyroscope // Sensors and Actuators A: Physical. – 1995. – 50(1-2) . – P. 111-115.
- [57] Wood D., Cooper G., Burdess J., Harris A., Cruickshank J. A Silicon Membrane Gyroscope with Electrostatic Actuation and Sensing // SPIE Proceedings in Microfabrication and Micromachining. – 1995. – V2642. – P. 74-83.
- [58] Johnson W.A., Warne L.K. Electrophysics of micromechanical comb actuators // Journal of Microelectromechanical Systems. – Vol. 4, No.1. – March 1995. – P. 49-59.

- [59] Barbour N., Connely I., Gilmore I., Greiff P., Kourepenis A., Weinberg M. Micro-electromechanical instrument and systems development at Draper Laboratory // 3-rd St. Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation. – St. Petersburg. – 1996. – P. 3-10.
- [60] Maenaka K., Fujita T., Konishi Y., Maeda M. Analysis of a highly sensitive silicon gyroscope with cantilever beam as vibrating mass // Sensors and Actuators A: Physical. – 1996. – 54(1-3) . – P. 568-573.
- [61] Greiff P., Antkowiak B., Campbell J., Petrovich A. Vibrating Wheel Micromechanical Gyro // Proc. of the IEEE Position Location and Navigation Symposium. – 1996. – P. 31-37.
- [62] Clark W., Howe R., Horowitz R. Micromachined Z-Axis Vibratory Rate Gyroscope // Technical Digest of the Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hillon Head, South Carolina. – 1996. – P. 283-287.
- [63] Paoletti F., Gretillat M-A., de Rooij N. A silicon micromachined vibrating gyroscope with piezoresistive detection and electromagnetic excitation // Micro-Electro-Mechanical Systems, MEMS '96 . – 1996. – P. 162-167.
- [64] Langmaid C. Vibrating Structure Gyroscopes // Sensor Review. – 1996. – Vol.16(1) . – P. 14-17.
- [65] Clark W. Micromachined Vibratory Rate Gyroscopes. PhD Dissertation, U.C. Berkeley. – 1996.
- [66] Збруцкий А.В., Апостолюк В.А. Микромеханический вибрационный гироскоп // Тезисы докладов международной научно-технической конференции “Современные научно-технические проблемы гражданской авиации”. – Москва: МГТУ ГА. – 1996. – С. 116-117.
- [67] Titterton D., Weston J. Strapdown Inertial Navigational Technology. – Peter Peregrinus Ltd, 1997. – 576 p.
- [68] Lutz M., Golderer W., Gerstenmeier J., Marek J., Maihofer B., Mahler S., Munzel H., Bischof U. A precision yaw rate sensor in silicon micromachining // International Conference on Solid State Sensors and Actuators, TRANSDUCERS '97 Chicago. – 1997. – Vol. 2. – P. 847-850.

- [69] Marselli C., Amann H.P., Pellandini F., Gretillat F., Gretillat M.-A., N.F. de Rooij. Error Modelling of a Silicon Angular Rate Sensor // Symposium Gyro Technology 1997. – Germany, Stuttgart. – 1997. – P. 4.0-4.9.
- [70] Geiger W., Folkmer B., Sandmaier H., Lang W. Improved Rate Gyroscope Designs Designated for Fabrication by Modern Deep Silicon Etching // Symposium Gyro Technology 1997. – Germany, Stuttgart. – 1997. – P. 2.0-2.8.
- [71] Kranz M.S., Fedder G.K. Micromechanical Rate Gyroscopes Fabricated in Conventional CMOS // Symposium Gyro Technology 1997. – Germany, Stuttgart. – 1997. – P. 3.0-3.8.
- [72] Sang-Hun Lee, Hyung-Taek Lim, Seong-Hyok Kim, Yomg-Kweon Kim. Design of a Planar Vibratory Gyroscope Using Electrostatic Actuation and Electromagnetic Detection // Symposium Gyro Technology 1997. – Germany, Stuttgart. – 1997. – P. 10.0-10.11.
- [73] Doronin V.P., Kharlamov S.A., Khromov B.V., Neapolitansky A.S., Novikov L.Z., Zhbanov Yu.K. Operation principle and basic errors of vibratory gyroscopes as rotation angle measuring device // 4-th St. Petersburg international conference on integrated navigation systems. – St. Petersburg. – 1997. – P. 337-346.
- [74] Niu M., Xue W., Wang X., Xie J., Yang G., Wang W. Vibratory wheel gyroscope // Proc. Transducers'97. – 1997. – P. 891-894.
- [75] Juneau T., Pisano A., Smith J. Dual axis operation of a micromachined rate gyroscope // Proceedings of the International Conference on Solid State Sensors and Actuators, TRANSDUCERS '97 Chicago. – 1997. – Vol. 2. – P. 883-886.
- [76] Апостолюк В.А., Збруцкий А.В., Мареш В.Р. Физические основы построения сверхпроводящего измерителя угловых перемещений // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Механіка гіроскопічних систем”. - Київ: “Либідь”. – 1997. – №14. – С. 10-15.

- [77] Apostolyuk V. A., Zbrutsky A. V. Investigation of micromechanical inertial devices // 4-th St. Petersburg international conference on integrated navigation systems. – St. Petersburg. – 1997. – P. 330-336.
- [78] Збруцький О.В., Апостолюк В.О. Мікромеханічний вимірювач кінематичних параметрів // Тези доповідей 1-ої національної науково-технічної конференції “Гіротехнології, навігація та керування рухом”. – Київ: НТУУ “КПІ”. – 1997. – С. 39-40.
- [79] Voss R., Bauer K., Ficker W., Gleissner T., Kupke W., Rose M., Sassen S., Schalk J., Seidel H., Stenzel E. Silicon angular rate sensor for automotive applications with piezoelectric drive and piezoresistive read-out // International Conference on Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS '97 Chicago. – 1997. – Vol. 2. – P. 879-882.
- [80] Hulsing R. MEMS Inertial Rate and Acceleration Sensor // IEEE AES Systems Magazine. – 1998. – P. 17-23.
- [81] Yazdi N., Ayazi F., Najafi K. Micromachined Inertial Sensors // Proceedings of the IEEE. – 1998. – 86(8) . – P. 1640-1659.
- [82] Oh Y., Lee B., Baek S., Kim H., Kim J., Kang S., Song C. A Tunable Vibratory Microgyroscope // Sensors & Actuators A. – 1998. – 64. – P. 51-56.
- [83] Allen J., Kinney R., Sarsfield J., Daily M., Ellis J., Smith J., Montague S., Howe R., Horowitz R., Pisano A., Lemkin M., Clark W., Juneau T. Integrated Micro-Electro-mechanical Sensor Development for Inertial Applications // IEEE AES Systems Magazine. – 1998. – P. 36-40.
- [84] Yachi M., Ishikawa H., Satoh Y., Takahashi Y., Kikuchi K. Design Methodology of Single Crystal Tuning Fork Gyroscope for Automotive Applications // Proc. of IEEE Ultrasonics Symposium. – 1998. – V1. – P. 463-466.
- [85] Geiger W., Folkmer B., Sobe U., Sandmaier H., Lang W. New designs of micromachined vibrating rate gyroscopes with decoupled oscillation modes // Sensors and Actuators A: Physical. – 1998. – 66(1-3) . – P. 118-124.

- [86] Kourepenis A., Bernstein J., Connelly J., Elliott R., Ward P., Weinberg M. Performance of MEMS Inertial Sensors // IEEE Symposium on Position Location and Navigation. – 1998. – P. 1-8.
- [87] Degani O., Seter D., Socher E., Kaldor S., Nemirovsky Y. Optimal Design and Noise Consideration of Micromachined Vibrating Rate Gyroscope with Modulated Integrative Differential Optical Sensing // IEEE Journal of Microelectromechanical Systems. – 1998. – V7(3) . – P. 329-338.
- [88] Григорян Э.А., Неаполитанский А.С., Харламов С.А., Шахов Д.С. Исследование влияния термоупругих напряжений элементов конструкции на точностные характеристики микромеханического вибрационного гироскопа // V Санкт-Петербургская международная по интегрированным навигационным системам. – Санкт-Петербург. – Май 1998. – С. 155-158.
- [89] Глыбин И.Г., Неаполитанский А. С., Турлыков В.Р., Харламов С.А., Хромов Б.В. Анализ и регулирование влияния сопротивления электрического контура на демпфирование микромеханических вибрационных гироскопов и акселерометров // V Санкт-Петербургская международная по интегрированным навигационным. – Санкт-Петербург. – Май 1998. – С. 159-162.
- [90] Збруцкий А.В., Апостолюк В.А. Микромеханические гироскопы и их использование в системах управления // Сборник трудов международной научно-технической конференции “Приборостроение-98”. – Ученые записки Симферопольского государственного университета. – Симферополь. – 1998. – С. 289-292.
- [91] Апостолюк В.А., Збруцкий А.В. Динамика одномассовых микромеханических гироскопов // Сборник докладов юбилейной научно-технической конференции “Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации”. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1998. – С. 52-65.

- [92] Збруцкий А.В., Апостолюк В.А. Динамика чувствительного элемента микромеханического гироскопа с дополнительной рамкой // “Гироскопия и навигация”. – Санкт-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”. – 1998. – №3(22) . – С. 13-23.
- [93] Збруцький В.О., Апостолюк В.О. Дослідження динаміки карданового мікромеханічного гіроскопа // Наукові вісті Національного технічного університету України “КПІ”. – Київ: НТУУ “КПІ”. – 1998. – № 3. – С.115-121.
- [94] Апостолюк В.О., Збруцький О.В. Температурні похибки карданового мікромеханічного вібраційного гіроскопа // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Механіка гіроскопічних систем”. – Київ: МНДІ ПМ “РИТМ”. – 1999. – №15. – С. 3-10.
- [95] U.S. Patent 5932804. Vibrating structure gyroscope / Hopkin I., Fell C., Townsend K., Mason T. – 1999.
- [96] Dong Y., Gao Z., Zhang R., Chen Z. A Vibrating Wheel Micromachined Gyroscope for Commercial and Automotive Applications // Proc. of the 16th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. – 1999. – 3. – P. 1750-1754.
- [97] Li X., Bao M., Yang H., Shen S., Lu D. Amicromachined piezoresistive angular rate sensor with a composite beam structure // Sensors and Actuators A: Physical. – 1999. – 72(3) . – P. 217-223.
- [98] Shkel A., Horowitz R., Seshia A., Park S., Howe R. Dynamics and control of micromachined gyroscopes // Proc. of the American Control Conference. – 1999. – vol. 3. – P. 2119-2124.
- [99] Апостолюк В.О., Збруцький О.В. Мікромеханічний вібраційний гіроскоп // Тези доповідей 2-ої міжнародної науково-технічної конференції “Гіротехнології, навігація та управління рухом”. - Київ: НТУУ “КПІ”. - 1999. - С. 11-12.
- [100] Апостолюк В.О., Збруцький О.В. Перехресна чутливість мікромеханічного вібраційного гіроскопа // Міжвідомчий науково-

- технічний збірник “Механіка гіроскопічних систем”. – Київ: МНДІ ПМ “РИТМ”. – 2000. – №16. – С. 11-19.
- [101] Збруцький О.В., Апостолюк О.С., Апостолюк В.О. Метод синтезу датчика кутової швидкості на динамічно настроюваному гіроскопі // Наукові вісті Національного технічного університету України “КПІ”, Київ: НТУУ “КПІ”. – 2000. – № 5. – С. 103-109.
- [102] Лестев А.М., Попова И.В., Евстифеев М.И. и др. Особенности микромеханических гироскопов // Микросистемная техника. – 2000. – №4. – С.16-18.
- [103] Leland R. Mechanical Thermal Noise in Vibrating Gyroscopes // Proceedings of the American Control Conference, June 25-27. – 2001. – P. 3256-3261.
- [104] Apostolyuk V., Logeeswaran V. J., Tay F. Efficient design of micromechanical gyroscopes // Journal of Micromechanics and Microengineering. – 2002. – no 12. – P. 948-954.
- [105] Apostolyuk V. A., Logeeswaran V.J., Tay F.E.H.. Analytical Design of Coriolis Vibratory Gyroscopes // Proceedings of Symposium Gyro Technology 2002, Stuttgart, Germany. – 2002. – P. 2.1-2.15.
- [106] Geen J., Sherman S., Chang J., Lewis S. Single-chip surface micromachined integrated gyroscope with 50 °/h allan deviation // IEEE Journal of Solid-State Circuits. – 2002. – 37(12) . – P. 1860-1866.
- [107] Кучерков С.Г. Использование интегрирующих свойств вибрационного микромеханического гироскопа с резонансной настройкой для построения датчика угловой скорости компенсационного типа // Гироскопия и навигация. – 2002. – №2. – С.12-18.
- [108] Евстифеев М.И. Погрешности микромеханического гироскопа на вибрирующем основании // Гироскопия и навигация. – 2002. – №2. – С. 19-25.
- [109] Madni A., Costlow L., Knowles S. Common design techniques for BEI GyroChip quartz rate sensors for both automotive and aerospace/defense markets // Sensors Journal, IEEE. – 2003. – 3(5) . – P. 569-578.

- [110] Painter C., Shkel A. Active structural error suppression in MEMS vibratory rate integrating gyroscopes // *Sensors Journal, IEEE*. – 2003. – 3(5) . – P. 595-606.
- [111] Лестев М. А. Влияние нелинейностей упругих элементов подвеса на динамику и точность микромеханических гироскопов // *Гироскопия и навигация*. – 2003. – №4 (43) . – с. 109 – 110.
- [112] Блохін Л.М., Буріченко М.Ю. Статистична динаміка систем управління. – К.: НАУ, 2003. – 208 р.
- [113] Apostolyuk V., Tay F. Dynamics of Micromechanical Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Sensor Letters*. – 2004. – V2(3-4). – P. 252-259.
- [114] Fraden J. *Handbook of Modern Sensors: Physics, Designs, and Applications*. – Springer, 2004. – 663 p.
- [115] Пешехонов В.Г. и др. Результаты разработки микромеханического гироскопа // *Гироскопия и навигация*. – 2004. – Т. 47, № 4. – С. 65.
- [116] Rajendran S., Liew K. M. Design and simulation of an angular rate vibrating microgyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2004. – 116(2) . – P. 241-256.
- [117] Oboe R., Antonello R., Lasalandra E., Durante G., Prandi L. Control of a Z-axis MEMS vibrational gyroscope // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. – 2005. – 10(4) . – P. 364-370.
- [118] Apostolyuk V. Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes // *MEMS/NEMS Hand-book* (Ed: Cornelius T. Leondes), Springer. – 2006. – Vol.1, Chapter 6. – P. 173-195.
- [119] Weinberg M., Kourepenis A. Error sources in inplane silicon tuning-fork MEMS gyroscopes // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2006. – 15(3). – P. 479-491.
- [120] Лестев М. А. Погрешности роторных микромеханических гироскопов, обусловленные нелинейными факторами // *Гироскопия и навигация*. – 2006. – №2 (53) . – С. 91.

- [121] Лестев М. А. Влияние нелинейностей подвеса и вибраций основания на динамику системы автогенерации колебаний микромеханических гироскопов // Материалы докладов VII конф. молодых ученых “Навигация и управление движением” / Под общ. ред. В.Г.Пешехонова – С.-Пб., ГНЦ РФ ЦНИИ “Электроприбор”. – 2006. – С. 150 – 157.
- [122] U.S. Patent 7250112. Method of making an x-y axis dual-mass tuning fork gyroscope with vertically integrated electronics and wafer-scale hermetic packaging / Nasiri S., Flannery Jr. A. F. – 2007.
- [123] Saukoski M., Aaltonen L., Halonen K. Zero-rate output and quadrature compensation in vibratory MEMS gyroscopes // IEEE Sensors Journal. – 2007. – 7(12). – P. 1639-1652.
- [124] Распопов В. Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.:Машиностроение, 2007. – 400 с.
- [125] Збруцький О.В., Гавриленко В.В., Стеценко Т.В. Динаміка вібраційних гіроскопів // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2007. – № 5. – С. 84-89.
- [126] Dong Y., Kraft M., Hedenstierna N., Redman-White W. Microgyroscope control system using a high-order band-pass continuous-time sigma-delta modulator // Sensors and Actuators A: Physical. – 2008. – 145-146. – P. 299-305.
- [127] Apostolyuk V. Dynamic Errors of Coriolis Vibratory Gyroscopes // Механіка гіроскопічних систем. – 2008. – №19. – С.230-239.
- [128] Chikovani V.V., Umakhanov E. O., Marusyk P. I. The compensated differential CVG // Proc. Gyro Technology: Symposium. – 2008. – 16–17 September, 2008, Karlsruhe, Germany. – P. 3.1–3.8.
- [129] Antonello R., Oboe R., Prandi L., Caminada C., Biganzoli F. Open loop compensation of the quadrature error in MEMS vibrating gyroscopes // Industrial Electronics, IECON '09, 35th Annual Conference of IEEE. – 2009. – P. 4034-4039.

- [130] Jiancheng F., Jianli L. Integrated model and compensation of thermal errors of silicon microelectromechanical gyroscope // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2009. – 58(9). – P. 2923-2930.
- [131] Apostolyuk V. Coriolis Vibratory Gyroscopes in Control Systems // Авіа-2009: IX міжнародна науково-техн. конф., 2009 р.: збірник доповідей. – К.: НАУ, 2009. – Ч. 2. – С. 9.1-9.4.
- [132] Apostolyuk V.O., Apostolyuk O.S. Transient Process Analysis of Coriolis Vibratory Gyroscopes // Механіка гіроскопічних систем. – 2009. – №20. – С. 64-74.
- [133] Apostolyuk V. Optimal Filtering of Stochastic Disturbances for Coriolis Vibratory Gyroscopes // Інформаційні системи, механіка та керування. – 2009. – №3. – С.20-30.
- [134] Apostolyuk V. Dynamics of Coriolis Vibratory Gyroscopes in Control Systems // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2010. – №1(13). – С.62-66.
- [135] Apostolyuk V. Demodulated Dynamics and Optimal Filtering for Coriolis Vibratory Gyroscopes // 17-th St. Petersburg international conference on integrated navigation systems: proceedings. – St. Petersburg (Russia). – 2010. – P. 57-59.
- [136] Apostolyuk V.O., Gorbunovich I.V. Mathematical Model of Coriolis Vibratory Gyroscopes Motion Trajectory // Механіка гіроскопічних систем. – 2010. – №21. – С.5-12.
- [137] Apostolyuk V.O., Didyk Z.V. Synthesis of Compensated Coriolis Vibratory Gyroscopes // Proceedings of National Aviation University. – 2010. – №3. – С.55-60.
- [138] Didyk Z.V., Apostolyuk V.O. Compensation Algorithms for Coriolis Vibratory Gyroscopes // Methods and Systems of Navigation and Motion Control: 1-st international conference, 13-16 October 2010 p.: proceedings. – К.: НАУ, 2010. – С. 124-127.

- [139] Apostolyuk V.O. Optimal Sensor Noise Filtering for Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Механіка гіроскопічних систем.* – 2010. – №22. – С.5-12.
- [140] Antonello R., Oboe R. MEMS Gyroscopes for Consumer and Industrial Applications // *Microsensors, Intech.* – 2011. – P. 253-280.
- [141] Apostolyuk V.O., Ivanenko I.V. Cross-coupling Compensation for Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Авіа-2011: X міжнародна науково-технічна конференція, 19-21 квітня 2011 р.: збірник доповідей.* – К.: НАУ, 2011. – Том 3. – С. 9.35-9.38.
- [142] Возний В.В., Апостолюк В.О. Вплив температури на динаміку коріолісового вібраційного гіроскопа // *Гіротехнології, навігація керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки: VIII міжнародна наук. техн. конф., 21-22 квітня 2011 р.: збірник доповідей.* – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – Ч. 1. – С. 48-51.
- [143] Возний В.В., Апостолюк В.О. Вплив температури на динаміку коріолісового вібраційного гіроскопа // *Інформаційні системи, механіка та керування.* – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – №6. – С.48-56.
- [144] Apostolyuk V. Cross-coupling compensation for Coriolis vibratory gyroscopes // *Механіка гіроскопічних систем.* – 2011. – №23. – С.5-13.
- [145] Apostolyuk V. Excitation of Primary Oscillations in Micromechanical Vibratory Gyroscopes // *Військово-технічний збірник.* – 2011. – №2(5). – С.130-135.
- [146] Apostolyuk V. Demodulated Kalman Filtering for Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Інформаційні системи, механіка та керування.* – 2011. – №7. – С.116-125.
- [147] Apostolyuk V. Modelling Trajectory Rotation in Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Авіація в XXI сторіччі – Безпека в авіаційних та космічних технологіях: 5-й всесвітній конгрес, 25-27 вересня 2012 р.: збірник доповідей.* – К.: НАУ, 2012. – Ч. 2. – С. 33.1-33.8.
- [148] Apostolyuk V., Chikovani V. Modelling Temperature Errors in Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Methods and Systems of Navigation and Motion*

- Control: 2-nd international conference, 9-12 October 2012: proceedings. – K.: IEEE, 2012. – С. 116-118.
- [149] Apostolyuk V., Chikovani V. Temperature Errors Compensation in Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Механіка гіроскопічних систем.* – 2012. – №25. – С. 22-29.
- [150] Apostolyuk V., Chikovani V. Temperature Error Model in Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Electronics and Control Systems.* – 2012. – №4 (34). – С. 155-158.
- [151] Tatar E., Alper S., Akin T. Quadrature-Error Compensation and Corresponding Effects on the Performance of Fully Decoupled MEMS Gyroscopes // *Journal of Microelectromechanical Systems.* – 2012. – Vol. 21 (3). – P. 656-667.
- [152] Prihodko I., Zotov S., Trusov A., Shkel A. Foucault Pendulum on a Chip: Rate Integrating Silicon MEMS Gyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical.* – 2012. – Vol. 177. – P. 67-78.
- [153] Apostolyuk V., Apostolyuk O. Application of Recursive Identification to Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки: IX Міжнародна науково-технічна конференція, 17-18 квітня 2013 р.: збірник доповідей.* – K.: НТУУ "КПІ", 2013. – С. 147-151.
- [154] Apostolyuk V. Demodulated Dynamics and Optimal Noise Filtering for Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Військово-технічний збірник.* – 2013. – №1(8). – С. 81-88.
- [155] Apostolyuk V. Dynamics of Trajectory Rotation in Coriolis Vibratory Gyroscopes // *Механіка гіроскопічних систем.* – 2013. – №26. – С. 15-21.
- [156] Chikovani V. V. Bias compensation in differential Coriolis vibratory gyro / V. V. Chikovani, H. V. Tsiruk // *Електроніка та системи управління.* – 2013. – № 4. – С. 99-103.

- [157] Chikovani V. V. Secondary wave control system of the coriolis vibratory gyroscope resonator / V. V. Chikovani // Електроніка та системи управління. - 2013. - № 1. - С. 58-61.
- [158] Apostolyuk V. Whole Angle Force Rebalance Control for Coriolis Vibratory Gyroscopes // Methods and Systems of Navigation and Motion Control: 3-rd international conference, 14-17 October 2014: proceedings. – К.: IEEE, 2014. – С. 69-61.
- [159] Apostolyuk V. Coriolis Vibratory Gyroscopes: Theory and Design. – Springer, 2015. – 117 p.

ДОДАТКИ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

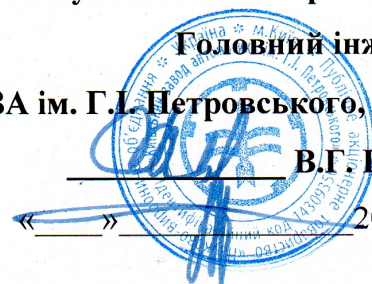
Перший заступник голови правління,

Головний інженер

ПАТ НВО КЗА ім. Г.І. Петровського, к.т.н.

В.Г. Цірук

2015 р.



АКТ

впровадження результатів наукових досліджень

к.т.н. Апостолюка Владислава Олександровича на тему

"Теорія та проектування коріолісових вібраційних гіроскопів"

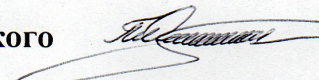
Наукові та практичні результати роботи Апостолюка Владислава Олександровича на тему "Теорія та проектування коріолісових вібраційних гіроскопів" були використані у НВО Київський завод автоматики ім. Г.І. Петровського у вигляді:

- математичних моделей похибок та методів оптимального проектування чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів;
- методів та систем усунення небажаних перехресних зв'язків;
- методів та алгоритмів фільтрації вихідних сигналів та методів керування у режимі інтегруючого гіроскопа.

В результаті впровадження зазначених математичних моделей, методів та алгоритмів керування було отримано результати, які підтвердили їх високу ефективність у покращенні вимірювальних характеристик коріолісових вібраційних гіроскопів.

В.о. начальника СКБ

ПАТ НВО КЗА ім. Г.І. Петровського

 Петренко А.О.



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Перший проректор НТУУ "КПІ"

Ю.І. Якименко

09 2015 р.

АКТ

впровадження результатів наукових досліджень в навчальний процес
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут»

Комісія у складі: голова комісії – декан факультету авіаційних і космічних систем, д.т.н., професор Збруцький Олександр Васильович, члени комісії – в.о. завідувача кафедри приладів та систем керування літальними апаратами (ПСКЛА), к.т.н., доцент Лукомський Василь Григорович, к.т.н., доцент Прохорчук Олександр Віталійович склали даний акт, про те, що результати наукових досліджень Апостолюка Владислава Олександровича на тему «Теорія та проектування коріюлісових вібраційних гіроскопів» впроваджені в навчальний процес кафедри ПСКЛА в лекціях з курсу "чутливі елементи систем керування літальних апаратів" та в науковій роботі магістрів спеціальності 8.100104 «Системи керування літальними апаратами».

Голова комісії
декан ФАКС
д.т.н., професор

Збруцький О.В.

Члени комісії:
в.о. зав. каф. ПСКЛА
к.т.н., доцент

Лукомський В.Г.

Заступник зав. каф. ПСКЛА з наукової роботи
к.т.н., доцент

Прохорчук О.В.